

日 本 大 學
工 學 研 究 所 彙 報

第 12 號

目 次

	頁
同軸型可変 Reactor を用いた内部空洞型 Reflex Klystron 用再生増幅回路	
石 井 好 隆	1
プレスの一型式	
抜 山 大 三	7
酸化エチレン縮合体に関する研究 (第 1 報)	
池 村 糺	10
古代メソポタミアにおける神殿建築の成立	
小 林 文 次	17
平面弾性問題に於ける特異点に就いての覚書	
長 尾 弘	24

昭和 30 年 11 月



U. of ILL. LIBRARY
AUG 7 1972
CHICAGO CIRCLE

JOURNAL OF THE RESEARCH INSTITUTE OF TECHNOLOGY,
NIHON UNIVERSITY.

No. 12 November, 1955

CONTENTS

	Page
Regenerative Amplifier Circuit using Internal Cavity Type Reflex	
Klystron with Co-axial Tuner.....	By Koryu ISHII.. 1
A Type of Forming Press	By Daizo NUKIYAMA.. 7
Studies on the Condensation Products of Ethylene Oxide (1)	
.....	By Tadashi IKEMURA.. 10
The Rise of a Temple Building in Ancient Mesopotamia	
.....	By Bunji KOBAYASHI .. 17
A Note on the Singular Points in the Two-dimensional Problem	
of Elasticity	By Hiroshi NAGAO.. 24

These publications are issued at irregular intervals. The authors alone are responsible for the contents of these reports.

同軸型可変 Reactor を用いた内部空洞型 Reflex Klystron 用再生増幅回路

(1955 年 6 月 2 日受理)

石 井 好 隆*

Regenerative Amplifier Circuit using Internal Cavity Type Reflex Klystron with Co-axial Tuner

By Koryu ISHII

It has been showed experimentally that we may amplify microwave signals by the use of internal cavity type Reflex Klystron controlling the output impedance of the external circuit by using the cutoff-waveguide type impedance tuner⁶⁾.

In this case, a co-axial type tuner stub is used instead of the cutoff-waveguide type.

Fig. 1 shows the experimental circuit. Amplifier tube, Reflex Klystron 2K25 is mounted on the waveguide with the co-axial tuner.

Fig. 2 is an explanation diagram of the amplification mechanism. The abscissa is microwave voltage across the gap of the tube. The P_e -curve shows power generated by the electron beam of the tube, and P_L -curves show power lost in the external circuit across the gap of the tube, and they are modified as P_{L1} -curve or P_{L2} -curve by proper adjustment of the co-axial tuner. In the case of the P_{L1} -curve, an oscillation occurs. In the case of the P_{L2} -curve, the oscillation does not occur. But, in this case, if we may have higher power, which is a mixture of P_e and incident signal power, than P_{L2} , then the regenerative amplification can be builded up.

Fig. 3 shows an equivalent circuit of the experimental system.

Fig. 4 shows the mechanical construction of the amplifier-tube 2K25 mount.

Fig. 5 shows relation between the repeller voltage and gain. The beam current is also represented by the dotted curve.

Fig. 6 shows characteristics of the co-axial tuner. Gain and the insertion loss were plotted along the stroke of the movable plunger of the co-axial tuner. In the case of 6 mm of the tuner dial, the apparent gain was 27.5 db with 9760 Mc/sec, and the insertion loss was 5.2 db; thus, the net gain was 22.3 db.

Fig. 7 shows frequency characteristics of this amplifier.

Fig. 8 shows the relation between the gain and the noise of the microwave amplifier versus the repeller voltage. At the value of the repeller voltage which gives the maximum gain, the noise is the minimum.

Fig. 9 shows the linearity of this amplifier.

Fig. 10 shows the stability of this amplifier for variation of the heater current.

In general, we could show experimentally the possibility of microwave amplification by the use of the internal cavity type Reflex Klystron with the co-axial tuner.

1. 緒 言

元来、空洞共振器を内蔵する Reflex-Klystron は、回路の Q が比較的高く非常に発振し易くこの発振を抑えて増幅せしめる事は極めて困難とされていたが、筆者は、この真空管の外部に、遮断領域型円筒形導波管可変 reactor を附し、出力 impedance を調整すれば周波数 9760 Mc の電波を増幅することを知った。

以上の事実は既に諸種の文献^{1) 2) 3) 4) 5) 6)}に発表して来たが、この度び、出力 impedance 調整器として、さきに使用した遮断領域型円筒形導波管可変 reactor の代りに、同軸型可変 reactor を用いたところ、やはり同様の結果を得たので、この回路に依る実験結果を報告すると共に、前者の reactor との利害得失に就いて考察してみたいと思う。

* 電気工学科

り, X_S を調整して R を適当な値にすれば, 第2図の P_L 曲線を P_{L2} 曲線のようにすることが可能であるから発振をさせないで増幅できるというわけである。

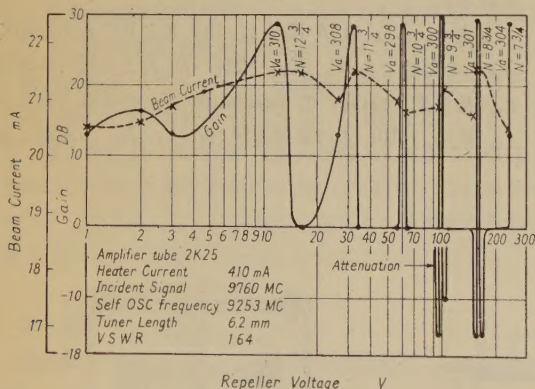
なお, 更に精密な関係は, 目下攻究中であるので, 別の機会に発表したいと思う。

4. 増幅管挿入部分の構造

第4図は, 増幅管 2K25 挿入部分の実際の構造を示す。Reflex-Klystron 2K25 の出力同軸 cable の中心導体を sleeve joint で延長し, その先にネジで駆動する同軸型可変 reactor が取り付けられており, 短路 piston を駆動して reactance を変化させるわけであるが, これには目盛指示器が付してあり, Piston の位置が, わかる様にしている。絶縁物としては Polisthylene を用いた。

5. 反射板電圧対利得特性

Reflex-Klystron を増幅管とした場合も, 発振管として使用した時と同様に各種の mode で, Repeller 電圧に対して増幅をするが, 第5図は外部回路の条件を図



第5図 2K25 増幅器の Repeller 電圧に対する増幅特性。この場合, Repeller 回路を Probe で探つて見たけれども振動は検知されなかつた。

中に記入してある状態に一定にしておき, 反射板電圧及び加速電圧を調整して最適の増幅状態にして, その時の反射板電圧に対する見掛け上の利得を実験的に調べた結果である。なお, その時の陽極電流も点線の曲線で示してある。

ここで見掛け上の利得とは, 増幅管を働かせた場合の真空管電圧計の読みを, 真空管を働かせない場合の真空管電圧計の読みで除した値の $10 \log$ を採つたもので, 検波器 1N23 の検波特性を自乗特性として算出した値である。

図中の V_a は陽極電圧で, N は drift cycle である。

図より明らかな如く, $V_a = 300$ Volts,

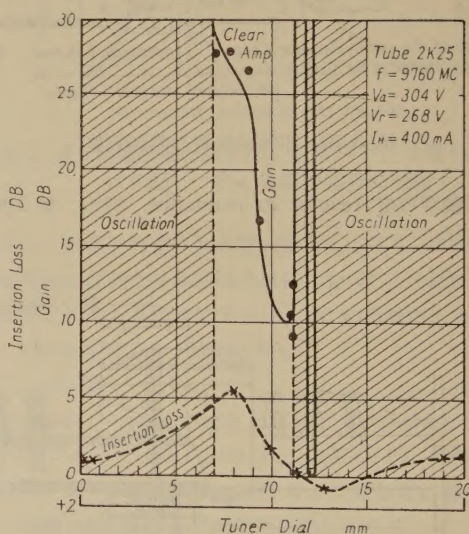
$V_r = -100$ Volts (反射板電圧) の時, 即ち

$N = 9\frac{3}{4}$ の mode の時の利得は 29.5 db で, 3 db

down の反射板電圧変動許容範囲は約 3 V であるから, 反射板電圧変動率が 3% 以内であれば, 利得の変化を 3 db 以内にすることができる。反射板電圧を, 更に低い電圧で使用すれば, もつと大きな電圧変動率でも利得の変動を 3 db 以内に収め得ることは, 図の実験結果より明らかな事実である。

6. 同軸型可変 reactor の増幅器の特性に対する効果

第6図は, 同軸型可変 reactor を用いた場合, その reactor の短絡 plunger の stroke に対して, 増幅器の特性が如何に変化を受けるかを実験的に調べたものである。



第6図 同軸型可変 reactor の可動短絡 plunger の stroke に対する見掛け上の利得及び挿入損失。

横軸に同軸型可変 reactor の plunger 駆動装置の読みを採り, 縦軸は見掛け上の利得及び挿入損失を示している。

横軸の mm の読みは, 直接 plunger の移動距離を示す様にしている。

既に発表してある遮断領域型円筒形導波管可変 reactor⁶⁾ の場合は最大利得から 3 db down の plunger 移動距離は, わづかに 0.025 mm であつたのに対し,

今度の場合は約 2 mm にも及ぶので、一度増幅最適の plunger の位置を発見した時には、極めて調整が容易である。

なお、挿入損失の zero db は、増幅管挿入部分の導波管を取り去り、入力側導波管を直接出力側導波管に取り付けた時の真空管電圧計の読みを基準としたもので、その場合には、整合は充分採つてあるが、実験装置の工作上のガタ等のため幾分反射波が残つて、挿入損失の曲線に正の部分が幾分か出て来ているものと思われる。

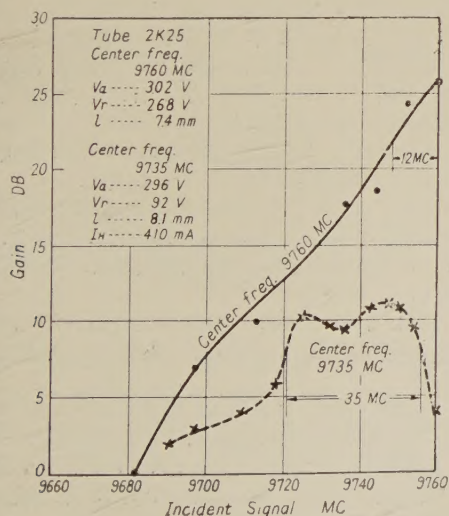
挿入損失は真空管の冷状態にて測定した値である。

遮断領域型円筒形導波管可変 reactor⁶⁾ を用いた場合と同様に Insertion Loss が最大となる様な plunger の位置附近にて、見掛け上の利得は最大となつている。この場合、見掛け上の利得は、plunger の読み 6 mm の時に 27.5 db で、挿入損失は 5.2 db であるから、正味の利得は 22.3 db という事になる。

以上の事実より、本増幅器を調整する要領としては、信号を入れて整合を採り、次に可変 reactor の plunger を駆動して挿入損失が最大となる位置附近に置き、電圧をかけ、調整すれば良い事がわかる。

7. 周波数特性

第 7 図は、受信側の回路及び電圧を図中に記入してある状態に一定にしておき、入力信号の周波数を変えて、増幅器の利得が如何に変化するかを実験した結果である。



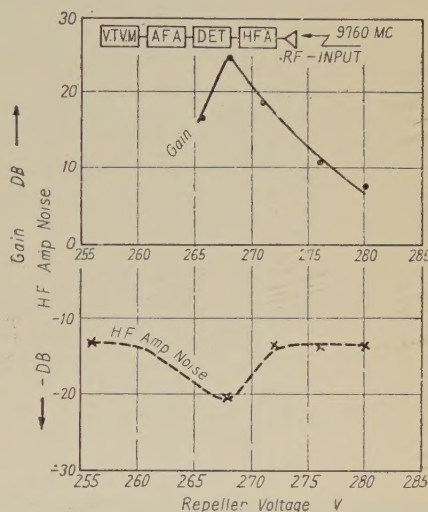
第 7 図 周波数特性

中心周波数をそれぞれ 9760 MC、及び 9735 MC に選んで試験した結果、3 db down の周波数帯域幅は、

それぞれ、12 MC 及び 35 MC という結果を得た。

8. 雑音

雑音の測定に関しては、更に精密な測定装置を組み立て研究する予定であるが、取り敢えず現在までに判明した資料を示すと第 8 図のようになる。



第 8 図 雑音と利得との関係

この場合、雑音電力の zero db は、第 8 図上部の block diagram にて 2K25 を用いた高周波増幅器 HFA を働かせない時の真空管電圧計の読みを規準として居る。今その読みを V_{N0} とし、2K25 増幅器を働かせた時の真空管電圧計の読みの増加分を ΔV_N とすれば、この場合の雑音出力は $10 \log (\Delta V_N / V_{N0})$ としてある。

第 8 図の block diagram の低周波増幅器 AFA は 70 db の利得があり、2K25 増幅器を動作させない時の真空管電圧計の読みは 0.1199 V であつた。

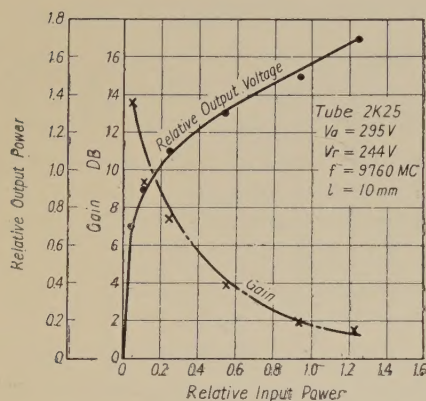
なお、更に精密な Noise Figure の測定に就いては、未だ研究中であるが、Feed Back の度合は、発振器として使用した場合より少ないのであるから、局部発振器として使用した場合よりも Noise Figure は少ないものと理論上、考えられている。

第 8 図より明らかな様に、見掛け上の利得が最大のところの反射板電圧にて雑音は最小となつている。この結果は、周波数 9760 MC 同軸型可変 reactor の読み $l=7.4$ mm、にて陽極電圧 291 Volts, Heater Current, 407 mA の場合である。

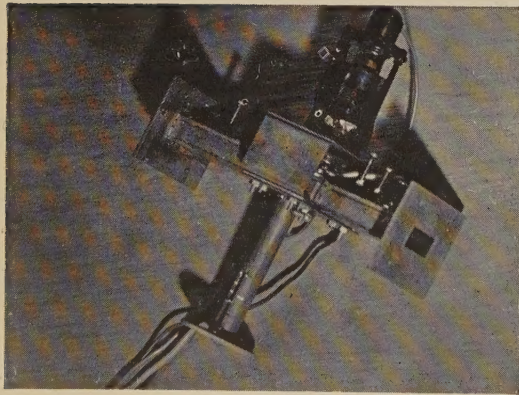
9. 直線性

第9図は、本増幅器の相対入力対相対出力の関係を示すもので、利得も計算してある。

小信号 level では直線性は良い。



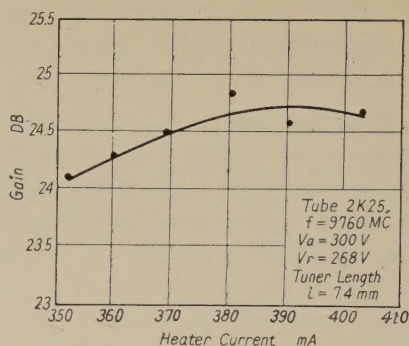
第9図 直線性



Reflex Klystron 2K25 (723 A/B) 増幅管挿入部分
下側の部分は同軸型可変 reactor

10. 安定度

陽極電圧及び反射板電圧の変動に対しては真空管式定電圧装置に依つて、電圧変動率を1~3%におさえれば、利得の変化を3 db 以内にすることは、さほど困難ではないが、Heater 電流の変化に対して、利得が如何に変化するかを試験した結果が第10図である。この場合、Heater 電流の13%の変化に対して利得の変化は0.8 db である。



第10図 Heater 電流の変動に対する増幅度の安定度

11. 結 言

以上の結果から明らかな様に同軸型可変 reactor を使用しても、遮断領域型円筒形導波管可変 reactor の場合と同様に極超短波を増幅し得る事が判明した。

なお、両者を比較してみると、工作は遮断領域型が容易であり、調整は同軸型が容易であり、その他の特性に関しては、殆ど両者ともに同様である事が判明した。

終りに、御指導御鞭撻を給つた本学部長横地伊三郎先生始め諸先生並びに本学講師中村新太郎博士に深謝すると共に、実験に御協力下さつた渡辺宅治氏及び小野恵三氏に感謝する。

参 考 文 献

- 1) 石井好隆: “X-Band 受信用増幅器” 「電子工業」1954年12月号. 工業資料社.
- 2) 石井好隆: “Reflex-klystron 723 A/B に依る極超短波増幅” 1954年12月3日. 日本大学工科学術講演会, 電気部会報告.
- 3) 石井好隆: “10,000 MC Band 1. V. 4 受信機” 「無線と実験」1955年1月号. 誠文堂.
- 4) 岡部・石井: “Reflex-klystron 723 A/B に依る10 kMC の増幅”. 1955年1月18日. 文部省. 「マイクロ波通信の研究」総合研究委員会. 真空管科会報告.
- 5) 岡部・石井: Reflex-klystron 723 A/B に依る10 kMC の増幅”. 1955年 電気三学会連合大会論文集.
- 6) Koryu Ishii: “X-Band Receiving Amplifier” p. 202. Electronics, April, 1955. McGraw Hill.
- 7) 岡部隆博: “反射型クライストロンを用いる極超短波増幅”(理論)昭和25年7月15日. 極超短波総合研究委員会特殊管科会報告.
- 8) 宇田新太郎: “速度変調管” p. 87. 修教社. 昭和24年5月30日発行.
- 9) 同上: p. 82.
- 10) 同上: p. 86.

プレスの一型式

(1955 年 9 月 30 日受理)

抜 山 大 三

A Type of Forming Press

By Daizo NUKIYAMA

In this paper a brief description of a special kind of forming press is given. The press has a die, but the punch has been replaced by a piston, hammer and fluid. It is different from an ordinary hydro-forming machine in that both sides of the plastically deformable sheet have fluid in order to prevent negative internal pressure of the sheet.

現在使用されている塑性変形用のプレスと其の原理が見方によつては全く異なるものと考えて見たのであるが、ここではポンチは完全に欠除されている点に特性があると見てもよいものである。今例えば第1図に示す様にダイス A の上にシリンダー B の支持台 C を重ね、ダイス A と支持台 C との間に加工すべき金属板 D を水密に挟み、シリンダー B にピストン E を挿入し、ダイス A 及びシリンダー B に夫々液体、例えば水の注入路 F, G を

注入路 F, G のコック J, K を夫々開いて金属板 D の上下空所 L, M に液体を注入して満たした後コック J, K を閉じる。然る時には空所 L の液体にはピストン E に依る圧力がかかる。依つて

$$P_1 - P_2 \cong Y \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad P_1 \cong W/S$$

但し、 P_1 は空所 L の圧力

P_2 は空所 M の圧力

Y は厚さ、質が特定の値を持つと考えられる時には常数で、金属板の或る特定点に於ける変形に対する塑弾性とも考えられ、 r_1, r_2 が大であり、加工すべき板が薄い時理論的にはその表面張力に比例する筈である。

r_1, r_2 は上記の点に於ける主曲率半径。

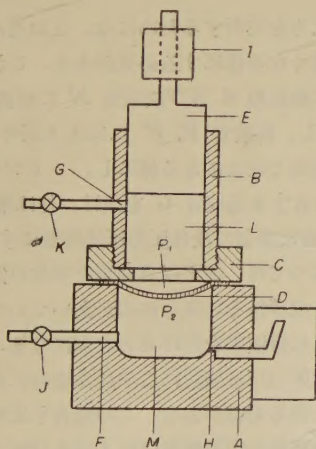
W はピストン Y により液体に加えられる力。

S はシリンダー B の断面積

である。なお、金属板の端を液体内に置く事を考えれば成形前後に於て、この端が同一水平面内に在る必要はなく、第二回の場合と合せ考えれば自由な型のものにも応用できる様になる。

これ等の状態においてピストン E にハンマー I で衝撃を加える時は、金属板 D はその内圧を小となさずにダイスの所まで圧延することができる。但し、この場合、狭搾流出路 H の断面積を適当に小となすことにより、空所 M 内の液体の流出量を制限して P_2 を高め、且つ $(P_1 - P_2)$ を金属板 D を変形せしめるに充分なる大きさとなし、而かも金属板 D 内の内圧を制限以下に低めることなしに操作し得る筈である。

なお、金属板 D の内圧が特定値以下となる時は金属

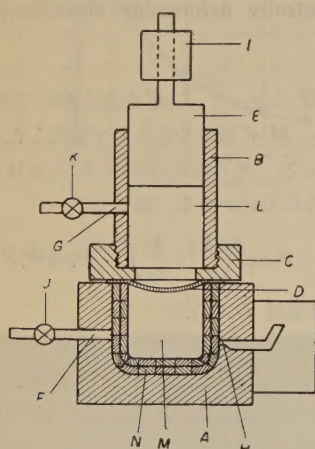


第1図 液体に依り塑性変型を起させる装置説明図であつてポンチの代りにピストン、ハンマー及び液体が使用されて居り通常の液体成型プレスとは金属板の両面に液体(圧力 P_1, P_2) が存在する事により異つてゐる。

設け、又ダイス A には狭搾流出路 H を設ける。I はピストン C に装着したハンマーである。斯くして、先づ

板 D に切れ目を生ずる状態となるのであるが、金属板 D の厚さの中央における外力による平均圧力 P は $(P_1 + P_2)/2$ で凡そ推測できる¹⁾。

この様な事情の凡そは容易に実験し得たのであるが、未だ充分な研究は行っていない。かくて液体圧力を利用し、ピストンにハンマーで衝撃を加えると共に狭搾流出路によつて金属板の内圧を制限以下に低めることなしに簡単、確実に、現在困難と考えられている鉄板、アルミ板等の金属板の深しぼりをなすことができる。この事情は金箔、銀箔等を木槌で打ち延して製作する事と、或は鉄板、アルミ板をロールする事情と全く同様である。

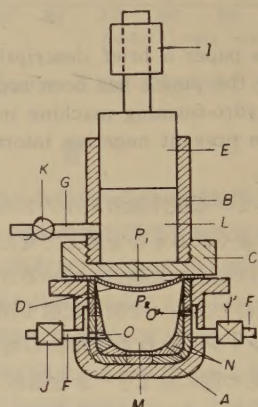


第2図 ダイスイ内面には工作の容易な物質が使用されても $P_1 - P_2$ なる液圧差に耐える材料であるならば良い事を示す。

なお、この方式を押し進める時には、例えば第2図に示す様にダイスを耐圧箱 A と其の内部に嵌入了た多孔性成型部 N とに大別して作り、他は第1図と同様にしたものが考えられる。この場合の操作方法、金属板の変形機構等は第1図の場合と全く同様であるが、成型部 N は前述の圧力差 $(P_1 - P_2)$ に耐えれば足りるから強大な圧力に耐える様に作る必要がなく軽石で事足りる場合、或は図に示す様に鉄或は黄銅のブロックをモザイクの挿入型式として作り、各ブロック間を通液路となる様にする事も考えられる。但し例えば図の様な形状のダイスでは型の上部程、金属板が多くその表面に接して滑るから、その程度に応じて摩擦に耐え得る様に成型部各所の材料を適当に選定して組合せるようにする必要がある。又成型部 N の外面が耐圧箱 A の内面に正確に一致しなくても成型部 N の内外に液体が存在するから成型部そのものには大きな力は作用しない。しかし耐圧箱 A はピス

トン E に加えられる力及びハンマー I の衝撃圧に耐える必要がある。

斯様にしてダイスを耐圧箱と多孔性部とで構成し、成型部の内面を所望の形状に作ることが容易で、しかも耐圧箱と成型部とが正確に密接しなくとも、大きな困難なしに支障なく金属板を変形することができる。然る時はダイスの製作が容易であるのみならず、成型部だけを変えることによつて異種の圧延を行えるから便利である。



第3図 液体を短時間に流出させ得る事を説明するための図。

以上の考え方を実行するためには、なお進んで、操作が時間的に速くなる様に必要がある。これには第3図に示す様に耐圧箱 A 及び成型部 N に排液管 F, O, F', O' を通し、排液管 F, F' には夫々圧弁 J, J' 又はその他の方法で定圧になる様にし、シリンダー B にコック K を有する注液管 G を設け、他は第1図及び第2図と同様な構造の液体圧力圧延装置にすればよい。

成型部によつては、例えば自動車の車体の窓の部分の様なものは、成型後その部分に穴があいていても支障がないが、そこに排液管を付けると有利になる。ここに考えた様な液体圧力圧延装置はこの様な場合に非常に成型速度を増大し得る利益がある。この場合も圧延機の方法並びに金属板の変形機構は第1図及び第2図の場合と殆ど同様であるが、排液管 $FO, F'O'$ の太さが充分であれば液圧 P_2 は、ほぼ定圧弁 J, J' の圧力を越すことがないから、液圧 P_2 が高くなり、そのため成型の速度を制限することなく、成型の速度を高める事ができる理である。排液管 F, F' の径は、全体から見れば非常に小であるから、成型工程の初めの間はそのだけ膨れるということも目立たないが、最後の段階で、其の場所に於ける曲率半径 r_1, r_2 の値如何によつては破れて穴があく様になる事も考えられる。

成型部 N に加えられる圧力はその面に垂直な圧力だけであるから、先と同様に、この圧力に耐えるだけの、加工に容易な軟質の材料で作ればよい。又ダイスの凸部即ち支持台 D に接する部分や、排液管 FF' の周辺等は、変形しない硬質の材料を用いる必要がある。且つ成型部 N は亀甲型その他のモザイクを使用するのを便とするが、排液管 F, F' は必ずしも排液管 OO' と直接的に連絡する必要なく、各モザイク部分の間隙からも、モザイクの裏側を通つて排液される様になし得る。かくの如く液体圧力圧延装置は上記の様な装置並びに作用によつて、圧延の速度を最高となし得る。

尚ほ、 P_1 の部分に液体を高圧に速く流入せしめるためには、例えばシリンダーを二個以上として蒸気機関に於けるものの逆作用として、水ポンプ型式とし連続作用せしめる方法等多くの変型が考えられ、プレス操作の速さに関しては、あまり心配の点はないものと考えられる。

又成型された板は液を逆流させる事或は空気を流入させる事等により容易に取り出し得る。但し成型部分が支持台より大となる場合には、一応嵌入式のダイスと同時に取り出す必要のある事は説明するまでもない。又この方式による時に必要な全外力(仕事)は現在行われている普通方式の場合と比較して却つて小さい筈である。その理由は摩擦によりダイス、ポンチ及び成型板に起される温度上昇が少くすむからである。その上特定温度にての成型がなし得る事等の利益がある。

普通自動車に使用される薄板鉄板では総ての P (ハンマーも考えに入れて) の大きさは数百気圧程度であると考えられる。又未だ測定の域には達して居ないのであるが、凡そ 1 mm 鉄板で内径 15 cm 程度のコップ型深絞りには成功した事を附記してこの報告を終らせて頂く事とする。²⁾

2) 本論文を故豊田喜一郎氏の霊に捧げる。

尾崎正久著：豊田喜一郎氏 p. 215.

酸化エチレン縮合体に関する研究

(第 1 報)

(1955 年 6 月 2 日受理)

池 村 紘

Studies on the Condensation Products of Ethylene Oxide (I)

By Tadashi IKEMURA

Making use of the remarkable reactivity of ethylene oxide in the polymerization and condensation in the manufacture of surface activators, the author tried the polymerization of ethylene oxide itself and its condensation with higher alcohols or oils. Quaternary amines, e.g., tetraethylammonium hydroxide, diethyl-lauryl-benzylammonium hydroxide, as well as alkali hydroxides which are most frequently used in these reactions were used as catalysers. As the reaction products generally have colours, ordinary decoloration method by active charcoal and the reduction decoloring by Raney-Ni were examined.

The results of the experiments are summarized as follows:

1) In the polymerization reaction, with adequate rate of addition of ethylene oxide (0.1~0.2 g/min) and the proper reaction temperature (100~140°C.) as a catalyser, potassium hydroxide is more effective than other kinds of catalyser, but it colours the reaction products and has a tendency to leave its traces in the reaction products, with detrimental influences. The author used tertiary amine and benzoylperoxide as well as the organic bases above cited. But the action of these catalysers were not so effective. Several solvents were used, and polyethylene oxide was found to be the best.

2) The condensation products of higher alcohols and oils as well as those of ethylene oxide and oils, having respectively hydrophobic radicals, both displayed their proper surface activity.

The ratio of addition of ethylene oxide varies according to the kind of reactors; the best temperature is 130~170°C.

Generally, higher alcohols are comparatively more reactive than oils, and caustic alkali is much better as a catalyser.

The greater the solubility in water, the greater consumption of ethylene oxide is found in the reaction. The water solubility is greater in the case of products which consume more ethylene oxide in the reaction, but those which consume less ethylene oxide are still fairly soluble.

As for the solubility of these reaction products in different kinds of solvents, that in water and benzene is the greatest.

3) Decoloration of the reaction products by reduction with Raney-Ni is more effective compared with the decoloring by active charcoal, the expected result was attained in a comparatively short time (3 hours) and under low pressures.

4) The author synthesized the two compounds above cited (tetraethylammonium hydroxide, diethyl-lauryl-benzylammonium hydroxide) and tried condensation respectively with each of these compounds. The degree of decoloration caused in the reaction products is lower compared with that in the products obtained, under the same condition, using the same amount of KOH as catalyser. Therefore, the catalyzing action of the organic bases is far less effective than that of the inorganic bases.

1. 緒 言

酸化エチレンは 1859 年 Wurtz 氏がエチレンクロルヒドリンに苛性加里を反応させて初めて合成した化合物

であつて、その構造式 CH_2-CH_2 の示す如く著しく反

応性に富み、殊に活性水素原子のある化合物と容易に反応して多くの有用な誘導体をつくる。酸化エチレンの重

* 工業化学科 有機合成研究室

合体である Polyethylene-oxide は米国の Carbide Carbon Chemical Corporation から“Carbowax”の商品名で市販されているが、これは白色の蠟状物質である。酸化エチレンの低重合体は液状物質であり、これらの重合体は適度の油性を持ち然も水に対し溶解性が大きい。この両性が染色に当つて秀れた緩染作用となり、又医薬では軟膏基剤として用いられている。酸化エチレンは単独で重合するばかりでなく、他の化合物と縮合したものが更に重合する。例えば油脂類に附加したものは条件に依つて重合反応が継続的に行なわれ、その結果親水性の化合物が得られる。この現象は全ての疎水性の物質に酸化エチレンが附加した場合に屢々見られるところである。この為本品は界面活性剤として、最近の化学工業に広く応用され重要な役割を演じている。この一群の活性剤の内非イオン界面活性剤は特に優れた性質を有し、その応用方面も広いが、これらは主に酸化エチレンを原料とし単独重合或は高級アルコール、脂肪酸等に附加重合したものである。

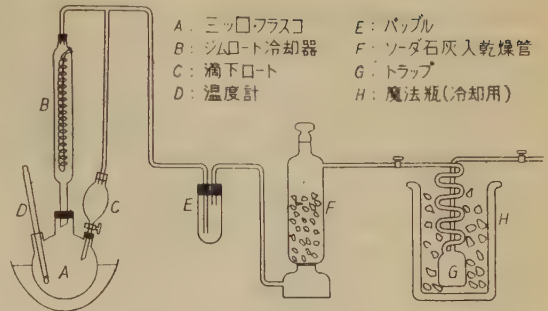
筆者はこの酸化エチレンの反応を利用し、酸化エチレンの重合反応と更に高級アルコール（抹香アルコール、セタール）油脂類（ヒマシ油、ウムエステルング油、水酸化油）との縮合反応を行い、その反応状況並びに生成物の諸性質を検討した。又縮合反応の場合触媒として一般に苛性アルカリ等の無機塩基が使用されているが、反応生成物からこれらが完全に除去されないと製品の安定性を欠く恐れがあるので、無機塩基の代りにこれらの欠点を補ひ且つ着色性を減少せしめる目的で有機塩基として第四級アミンの Tetraethyl-ammonium hydroxide, Diethyl-lauryl-benzyl-ammonium hydroxide を使用した。更に反応生成物の水素還元による脱色法をも行つた。

2. 実験並びに結果の考察

酸化エチレンの反応には常圧気相重合法¹⁾、常圧液相重合法²⁾、加圧液相重合法^{3,4)}等があるが、本研究は常圧液相法によつて行つた。

(1). エチレンクロルヒドリンより酸化エチレンの発生

A 中にエチレンクロルヒドリン 1 部に対し水 2 部を加え C 中に 35% 苛性ソーダ水溶液 2 部を入れ、A 部を加熱し乍ら C より液を滴下し、発生した酸化エチレンを G に捕集する。反応温度は 70°C が適温と思われたが、苛性ソーダ水溶液を順次滴下するため、この温度保持には相当の注意が必要である。ソーダ液を滴下した後 10 分間、共沸点である 96°C 迄温度を上升させ完全に酸化エチレンを除去する。これらの結果を第 1 表に



第 1 図

示した。

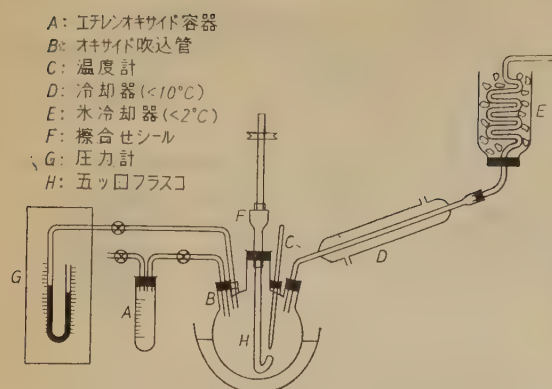
本表から判るように実験番号 No. 10 の条件が 71.6% と最もよい収率を得た。小方氏⁵⁾によると収量 73% であるが、この種の試験で 80% 以上の収量を得ることは困難と思われた。一般にソーダ液の滴下速度が 2.0 gr/min 以下では収率が低い結果を得ている。

第 1 表 酸化エチレンの生成結果

実験 番号	エチレンクロル ヒドリンの モル数	エチレンオ キシドの 収量 (gr)	収率 (%) (理論量に 掛る)	NaOH 液の 滴下速度 (gr/min)
1	0.75	5.0	15.2	4.0
2	0.75	9.0	27.3	4.0
3	0.75	9.0	27.3	1.7
4	0.75	9.0	27.3	2.4
5	0.75	10.8	32.7	1.7
6	0.75	12.0	36.4	4.0
7	0.75	18.0	54.5	4.0
8	1.49	22.5	34.3	2.2
9	0.99	27.0	66.5	1.5
10	0.99	29.0	71.6	2.3
11	1.49	32.0	48.7	2.7
12	1.49	29.0	44.2	3.4
13	1.30	34.0	59.4	2.6
14	1.49	40.0	60.9	2.4

(2). 酸化エチレンの重合反応^{6),7),8)}

酸化エチレンの重合はその機構から見ると縮合的重合であると思われる。しかしこれは酸化エチレンが先ず開環して附加するものと考えた場合にいえるのであるが、重合に際して開環するものであれば、寧ろ附加重合というべきである。この重合機構については、Wurtz⁹⁾, Roithner¹⁰⁾, Staudinger¹¹⁾, Hibbert¹²⁾ 等の研究があるが、その解決は両者各々の論拠があつて未定であるという現状である。重合反応は次の第 2 図の装置に依つて行つた。



第 2 図

H 中に溶媒及び触媒を入れ攪拌しつつ、酸化エチレンのガス体を吹き込む。未反応の酸化エチレンは D, E 中で凝縮し還流する。還流が終れば反応は一応終るが更に 2~3 時間攪拌するがよい。

触媒: 酸化エチレンの単独重合には酸性、中性、塩基性の凡ゆるものが使用されるが、その他の場合は無機性塩基として苛性アルカリ、有機性塩基として第二級、第三級、第四級アミンを使用した。苛性カリ、苛性ソーダは熔融脱水し冷却後粉碎して使用した。

溶媒: この反応には水は禁忌とされている為溶媒に水分の混入は極力防止すべきである。酸化エチレンに作用しないが然も沸点が $120\sim 160^{\circ}\text{C}$ で反応を行うに都合よい溶剤としてリグロイン、ケロシン、Polyethylene oxide、ニトロベンゼンを使用した。

第 2 表 エチレンオキサイド重合反応結果

実験番号	溶 媒		触 媒		エチレンオキサイドの使用量 gr	増量 gr	反応温度 $^{\circ}\text{C}$	反応時間 hr	導入平均速度 gr/min	生成物の色
	種 類	用量 gr	種 類	用量 gr						
15	リグロイン	20	KOH	2	32	4	11~13	3	0.2	僅かに着色
16	リグロイン	10	KOH	1	34	5	100~120	4	0.1	褐色
17	ポリエチレンオキサイド	10	$(\text{C}_2\text{H}_4\text{OH})_3\text{N}$	2	40	3	11~30	7.5	0.1	橙黄色
18	ポリエチレンオキサイド	10	$(\text{C}_2\text{H}_4\text{OH})_3\text{N}$	2	27	4	110~130	5.5	0.1	橙色
19	ポリエチレンオキサイド	10	NaOH	1	29	6	110~150	3.5	0.1	黒褐色
20	ニトロベンゼン	10	NaOH	1	2.7	0.1	—	2.5	0.2	褐色
21	ニトロベンゼン	5	NaOH	0.5	0.9	—	120~140	3.0	0.2	褐色
22	ケロシン	20	$(\text{C}_6\text{H}_5\text{CO})_2\text{O}_2$	0.5	4.5	0.2	120~140	4.0	0.1	橙色
23	ケロシン	20	"	0.5	22.5	2	110~150	4.0	0.1	赤橙色
24	ケロシン	20	"	0.5	10.8	1	—	3.0	0.1	橙色

酸化エチレンの導入速度は $0.1\sim 0.2\text{ gr/min}$ が適当で、反応温度は 100°C 以上とすることが必要である。例えば反応温度を $11\sim 30^{\circ}\text{C}$ にして 2 回実験を行つたが、1 回は殆んど反応が起らず、他の 1 回は使用した酸化エチレンの 10% が消費されたのみであつた。用いた触媒のうちでは苛性カリ、苛性ソーダが最も著色度が大きく、粘度も又大きい Triethanol amine, Benzoyl-peroxide の両者は他に比較するとその触媒の作用が低く、結局無機の塩基を用いることが収量もよく、経済的にも有利であると思われる。溶媒の沸点は前述の様に反応温度以上のものが望ましく、このためリグロインは沸

点低く不適当で同系統ではこれより沸点の高いケロシンの方がよく、これ等のうちでは Polyethylene oxide が最も適当な溶剤と思われた。

3. 酸化エチレンと高級アルコール及び油脂類との縮合反応

酸化エチレン附加化合物の合成に使用した試料は次の特性を示す。

(1) 抹香アルコール (大洋漁業製品)

アセチル価, 174.5; 鹼化価, 0.5; 沃素価, 42.7

(2) セタノール (関東化学製品第 1 級)

アセチル価, 178.2; 鹼化価, 沃素価共に 0.0

(3) ヒマシ油

アセチル価, 152.2; 鹼化価, 181.2; 沃素価, 92.3; 酸価, 6.21

(4) 水酸化油

アセチル価, 292.1; 鹼化価, 201.5; 沃素価, 100.2

(5) Umesterung 油

アセチル価, 158.2; 鹼化価, 231.2; 酸化, 16.4;

これら5種の試料の内, (4) (5) は研究室でつくつたものである。即ち水酸化油^{13), 14)} は三ツロフラスコに効率のよい攪拌器, 逆流冷却器及び温度計を備え, 大豆油 100 gr, 30% H₂O₂ 25 gr, 60% H₂SO₄ 45 gr を入れ反応温度 85°C で 4 時間激しく攪拌すると完全な乳化状態となる。これより油分を分離したものである。

Umesterung 油^{15), 16)} の製造は椰子油 60 gr, エチレングリコール 15 gr, 苛性ソーダ 0.2 gr を入れ 150°C で 3 時間半振盪し, その生成物を湯洗して残在している

エチレングリコールを完全に除き, 濾過乾燥したものである。アセチル価より推定して相当ウムエステルングされて居るものと考えられる。生成油はアルコールに完全に溶解し, 水と振盪するとエマルジョンを生ずる。この実験により得た縮合体が界面活性剤として有効なりや否やを検討したが, 文献中には酸化エチレンと他の化合物の附加体を活性剤としたものが 2, 3 ある^{17), 18), 19)} 反応は第 2 図の装置を使用した。触媒は苛性ソーダ, 苛性カリ, ソーダライム, Toriethanol amine を使用した。NaOH 及び KOH は一旦熔融して完全に脱水後, 直ちに粉碎したものをを用いる方法と第 2 は熔融した触媒中に軽石の細片を浸してこれを取り出し, デシケター中で冷却したものをを用いる方法の 2 種類のものについて行つた。ソーダライムは熔融せず加熱脱水し出来るだけ細片として使用する。温度 120~170°C で 3~9 時間, 導入速度 0.1~0.2 gr/min, 反応の終つた生成物は 5 倍量のベンゼンアルコール混液に溶解し, アルコール硫酸で中和 (pH 7.0~7.1) した後, ベンゼンアルコール混液を蒸溜し, 残留物は湯煎上で水分を除き減圧蒸溜後生成物を得た。この反応状況は第 3 表 の如くである。

第 3 表 縮合体の反応状況

実験番号	縮 合 物	触 媒		使用せる エチレン オキサイ ド gr	吸収せる エチレン オキサイ ド吸収率 %	反応 温度 °C	反応 時間 hr	導入平均 速度 gr/min	平 均 分子 量	生成物 の色相
		種 類	用量 gr							
25	抹香アルコール	NaOH	2	18	88.5	160~170	7	0.24	981.2	黄色
26	抹香アルコール	NaOH	1	15	84.2	140~150	8	0.19	765.4	黄色
27	抹香アルコール	NaOH	1	12	91.0	130~140	9	0.10	—	黄色
28	セタノール	NaOH	1	7.2	60.5	160~170	3	0.18	462.0	薄黄色
29	セタノール	NaOH	2	18	48.1	140~150	4	0.25	514.5	薄黄色
30	セタノール	NaOH	1	12	50.0	130~140	5	0.18	—	薄黄色
31	セタノール	ソーダライム	2	29	13.7	150~160	4	0.16	470.7	黄色
32	セタノール	ソーダライム	1	15	17.3	130~140	7	0.10	421.5	黄色
33	セタノール	KOH	1	12	90.2	120~130	4	0.20	596.1	橙色
34	セタノール	KOH	2	12	92.9	160~170	5	0.10	646.7	橙色
35	ヒマシ油	NaOH	1	16.1	84	160~170	5	0.24	829.1	黄褐色
36	ヒマシ油	(C ₂ H ₄ OH) ₂ N	3	15.8	45.1	120~130	4	0.10	—	黄褐色
37	ウムエステルング油	(C ₂ H ₄ OH) ₃ N	2	16.3	50.3	140~150	5	0.19	962.5	黄褐色
38	ウムエステルング油	(C ₂ H ₄ OH) ₂ N	1	15	49.3	140~150	5	0.10	—	黄褐色
39	水酸化油	NaOH	2	15.1	90.1	120~130	5	0.18	762.1	暗褐色
40	水酸化油	NaOH	1	14.2	87.5	120~130	4	0.10	734.5	暗褐色

酸化エチレンはその容器を 15~17°C の浴中に浸し, 沸点の附近で平均速度 0.1~0.2 gr/min で徐々に導入す

る。触媒は単独重合の場合と同様, 苛性カリ, 苛性ソーダが良い様である。生成物の色は濃淡はあるが, 一般に

第 4 表 溶剤に対する溶解性

溶剤	試料 抹香アル コール 縮合体	セタノ ール	ヒマシ油	水酸化油
水	VS	VS	VS	VS
メタノール	S	S	S	S
エタノール	S	S	S	S
イソプロパノール	S	S	S	S
クロロヒドリン	S	S	S	S
アセトン	S	S	S	S
エーテル	SL	SL	SL	SL
醋酸エチル	S	S	S	S
クロロホルム	S	S	S	S
シクロヘキサノン	S	S	S	S
ベンゼン	VS	VS	VS	VS
二硫化炭素	S	S	S	S
四塩化炭素	S	S	S	S
リグロイン	S	S	S	S

S: 可溶 VS: 非常に可溶 SL: 僅かに可溶

褐色を帯び、導入し始めてわずかにして色がつき始める。これは酸化エチレンの縮合により不飽和結合が増加するためであろう。水に対する溶解性は酸化エチレンの吸収量の多い程大きく、又その吸収量が少いものでも可成りの溶解性を示した。次に種々の有機溶剤に対する生成物の溶解性を表示する。試料 1 gr を試験管に取り 10 cc の溶媒を加え加温溶解させ冷却したときの結果を示している。

この試験結果より水とベンゼンが最も良好なる溶剤と考えられる。他の溶剤にも溶けるが特にエーテルに対しては溶けにくい結果を示した。

4. 縮合体の脱色

反応物は 何れの 方法に 依つても 相当着色 している ので、脱色 の 目的で 活性炭 を 用いた が、脱色 は 不可能 で あつた。それで 触媒 として ラネー Ni を 使用 し、平均 圧力 25~26 atm で 温度 85~95℃、4 時間、水素還元 を 行つた 所著しく 脱色 する 結果 が 得られた。その 結果 は 第 5 表 に 示して ある。

第 5 表 水素還元による脱色結果

実験 番号	展 開					反 応			脱 色 結 果	
	試 料	用量 gr	メタノール gr	Raney Ni gr	30% NaOH cc	温度 ℃	圧力 Kg/cm ²	時間 hr	反応生成物	処理後の色
41	Umesterung	20	60	1.5	6.7	90	25~26	4	茶色	淡橙色
42	"	15	50	1.5	6.7	90~95	25~26	3	茶色	淡橙色
43	水酸化油	20	50	1.5	6.8	90	26	3	焦茶色	薄茶
44	ヒマシ油	10	60	1.5	6.8	85~90	25~26	4	焦茶色	薄茶
45	セタノール	15	80	1.5	6.8	90	26	4	黄色	白色
46	抹香アルコール	10	200	1.5	6.8	90	26	4	黄色	白色
47	ポリエチレン オキサイド	15	50	1.5	6.8	90	26	4	黄色	白色

以上の結果より酸化エチレンの強アルカリ性に於ける重合に於て副生物として生成されると考えられる不飽和アルデヒド縮合体の存在に基く着色原因が水素添加により飽和されその脱色効果を発揮したと考えられる。これにより工業的に活性炭其他の方法で上記化合物の脱色精製が困難とされていた問題を解決することが出来た。

5. 触媒の影響

前述のように一般に苛性カリ、苛性ソーダ等の無機塩基が使用されているが、これらが反応生成物から完全に除去されないと、製品の安定性が悪いので、この代りにその除去が容易と考えられる有機性の第四級アミン類を用いて実験を行つた。先ず比較の為、苛性カリ触媒につ

き行つた結果を第 6 表に示す。

Tetraethylammonium hydroxide の合成

200 cc の ethyl-alcohol と 95 gr の ethylbromide を 混じこれを冷却しつつ数回アンモニアガスで飽和して一昼夜放置すると NH₄Br の結晶を生ずる。これを濾過し濾液を蒸溜して過剰のアルコールと未変化の ethylbromide を蒸溜し去り、次いで残液に水を加えて煮沸、アルコールを完全に除去し、苛性ソーダの濃厚液を加えてアミンを遊離して分溜し Triethylamin (B. P. 89~90℃)を得る。この Triethylamin に更に ethylbromide の等量を加えて弛く栓をして 2 日間放置すると Tetraethylammoniumbromide が結晶として得られるから、

第 6 表 苛性カリを触媒とした実験結果

実験番号	溶 媒		触 媒		使用せるエチレンオキサイド gr	吸収せるエチレンオキサイド		反応温度 °C	吸収に要した時間 hr	導入平均速度 gr/min	生成物の色
	種 類	用量 gr	種類	用量 gr		収量 gr	エチレンオキサイド吸収率 (%)				
48	Tetradecylalcohol	10	KOH	0.5	26.0	21.0	80.83	160	5.00	0.09	赤茶
49	"	10	KOH	"	23.0	15.0	64.7	"	3.30	0.11	赤茶
50	"	10	KOH	"	4.0	1.5	41.67	"	1.00	0.06	赤茶
51	Butylalcohol	10	KOH	"	10.0	7.0	71.1	100	1.30	0.12	橙色
52	Amylalcohol	10	KOH	"	"	4.5	50.2	120	1.00	0.15	橙色
53	Octylalcohol	10	KOH	"	25.0	20.5	84.9	150	2.00	0.19	橙色

これを水から再結晶する。この結晶を水に溶かし 85 gr の AgNO_3 と 150 cc の 20% NaOH とより得た Ag_2O を加えて Ag_2O の溶解せずに残存する部分があるまで加えてこれを濾別し濾液を煮つめて残渣を CaO 上にて真空に放置すると白色の Tetraethylammoniumhydroxide が結晶として得られる。

Diethyl-lauryl-benzyl-ammonium hydroxide の合成

Diethylamin と Laurylchloride とをオートクレブに入れて 90°C で 10 時間加熱し、これに Benzylchloride を加えて更に 100°C で 10 時間加熱する。この生成物より Benzylchloride, Laurylchloride を減圧蒸溜にて徐くと残留物は半固体の Diethyl-lauryl-benzyl-ammonium chloride である。これに Ag_2O を作用させて hydroxide とする。

上記方法で合成した第四級アミンを使用した実験結果を第 7 表に示す。

第 7 表 有機アミン類を触媒とした実験結果

実験番号	溶 媒		触 媒		使用せるエチレンオキサイド gr	吸収せるエチレンオキサイド		反応温度 °C	吸収に要した時間	導入平均速度 gr/min	生成物の色
	種 類	用量 gr	種類	用量 gr		収量 gr	エチレンオキサイド吸収率 (%)				
54	Ethylenglycol	10	A	0.5	23.2	20.0	86.1	150	2.30	0.15	淡黄色
55	Tetradecylalcohol	10	A	0.5	25.9	20.0	72.1	150	3.00	0.14	淡黄色
56	Octylalcohol	10	A	0.5	11.6	7.5	65.1	160	1.30	0.13	淡黄色
57	Amylalcohol	10	A	0.5	10.8	7.2	61.3	120	1.30	0.11	黄色
58	Ethylenglycol	10	A	0.5	19.7	0.3	1.2	150	2.30	0.13	淡黄色
59	Octylalcohol	10	A	0.5	22.4	15.0	76.2	170	2.30	0.14	淡黄色
60	Ethylenglycol	10	A	0.5	22.4	2.5	12.0	160	3.00	0.12	淡橙色
61	"	10	B	0.5	7.2	4.0	16.0	150	0.30	0.25	黄色
62	"	10	C	0.5	25.1	2.5	12.0	160	3.00	0.15	淡黄色
63	"	10	C	0.5	21.5	10.0	45.0	160	2.00	0.13	淡黄色

A: Tetraethyl-ammonium-hydroxide.

B: Tetraethyl-ammonium-bromide.

C: Diethyl-lauryl-benzyl-ammonium-hydroxide.

5. 総 括

表面活性剤の製造に関連して酸化エチレンが重合、縮合等に大きな反応性を有する点を利用し本品自身の重合、或は本品と高級アルコール及び油脂類との縮合を試

みた。触媒としてはこの種の反応に最も多く用いられる苛性アルカリの外に、第四級アミン tetraethyl-ammonium hydroxide, diethyl-lauryl-benzyl-ammonium hydroxide 等の有機塩基も使用した。反応生成物は概ね

着色するので常法の活性炭脱色の外に Raney Ni に依る還元脱色を試みた。

その結果を概説すると

1) 重合反応では酸化エチレンの導入速度は 0.1~0.2 gr/min, 反応温度は 100~140°C が適当である。触媒としては従来用いられている苛性カリは有効であるが着色度が大きいと、その痕跡が反応生成物に混在する傾向強くこれが製品に悪い影響を与えるので、上記有機塩基の外に triethanolamine, benzoylperoxide 等についても試験したが、その作用は思わしくなかつた。溶媒は数種試用したうちでは, polyethylene oxide が最も適当なものと認めた。

2) 高級アルコール或は油脂類と酸化エチレンとの縮合生成物は、夫々の有する疎水性基のため特有な表面活性を示した酸化エチレンの導入速度は縮合する相手に依つて異なるが、130~170°C が良好の様であつた。一般に油脂類に較べて高級アルコールの方が反応性が良く又触媒としては KOH, NaOH が良い。水に対する溶解性は反応で酸化エチレンの消費量の多いもの程大きい、之の少ないものでも可成りの溶解性を示した。これら反応生成物の各種溶剤に対する溶解性は水及びベンゾールが最も大きい結果を得た。

3) 反応生成物の脱色はラネー Ni に依る還元が脱色炭法に比し有効で、比較的低圧 (25~26 Kg/cm²), 短時間 (3 時間) でこの目的を達した。

4) 上記 2 種 (tetraethylammonium hydroxide, diethyl-lauryl-benzyl-ammonium hydroxide) を合成し、これを用いて縮合を行つた。その結果は同量の KOH 触媒を使用して同一条件で反応したもの比べ、反応生成物の色は薄い。よつて触媒作用は無機塩基のそれに比較して、遙かに劣る結果を得た。

本研究にあたり御懇切なる御指導を賜りました庄野, 三羽両博士に深く感謝する。(昭和 27 年 4 月日本化学会第 5 年会にて講演)

文 献

- 1) I. G.: D.R.P., 597, 496
- 2) I. G.: D.R.P., 616, 428
- 3) I. G.: D.R.P., 605, 973
- 4) B.A.S.F.: D.R.P., 299, 682
- 5) 小方芳郎: 有機反応論 (1950)
- 6) 桑原, 小田: 高分子化学, **6**, 124 (1949)
- 7) 桑原, 小田: 高分子化学, **7**, 73 (1950)
- 8) 本邦特許: 148, 142
- 9) Wurtz: Ann. Chim. Phys., [3] **69**, 330 (1863)
- 10) Roithner: Monatsh., **15**, 679 (1894)
- 11) Standinger: Ber., **62**, 2395 (1929); Ann., **585** 41 (1935)
- 12) H. Hibbert, et al: Can. J. Research, **8**, 102 (1933); **14**, 77 (1936); J. Am. Chem. Soc., **58**, 813 (1936); **59**, 1514, 2521 (1937); **61**, 1905, 1910, 1912, 1916 (1939); **62**, 230, 2144, 2400, 2561, 2599 (1940)
- 13) 石井: 工化 (昭 15) 600
- 14) 小田, 横川: 工化 **41** (1938) 365
- 15) 小田: 工化 **35** (昭 7) 1271
- 16) 小田: 工化 **36** (昭 8) 365, 755, 854, 858, 945, 1213, 1371
- 17) 小田, 古川: 工化 **54** (1951) 405
- 18) 磯田, 前川: 工化 **54** (1951) 773
- 19) 千田, 小田: 工化 **55** (1952) 94

古代メソポタミアにおける神殿建築の成立¹⁾

(1955 年 5 月 24 日受理)

小 林 文 次*

The Rise of a Temple Building in Ancient Mesopotamia

By Bunji KOBAYASHI

A temple building, the first monumental building in architectural history, was born in ancient Mesopotamia without any influences of other region.

The first building which was assumed to be used for religious purpose was found at Tall Arpachiyah in its Stratum X-VII (Halaf-Period) and was of *tholos* type. This type of religious building was also uncovered at Tepe Gawra in its Stratum XX-XI (From Halaf- to Alubaid-Period). Because we know that a round house existed at the Hassuna site in its Stratum I b, we can certainly conclude that the temple building of *tholos* type was derived from the round type of dwelling.

But the type which was developed later on was rather rectangular, and the first of this type was uncovered at Eridu in its Stratum XVII. It was of almost square plan; an offering table at the centre, had a buttress projected inward at the centre of each side. It is needless to say that this rectangular type of temple was also derived from the contemporary dwelling. Apparently these buttresses were either for support of beams, or for reinforcement of the wall, in other words, of quite practical use; yet, in the case of the temple in the Stratum XV (Fig. 5), they were used almost only on the short side which meant neither for the support of beams, nor for just reinforcement, and assumedly for some conscious articulation of the interior wall surface. It was in the very temple of the Stratum XI (Fig. 6) that the buttress became to be projected outward for the first time in Eridu, which—it is quite important—was accompanied by the appearance of a high platform of the building. (Fig. 6) Such change of meaning in the buttress was also seen at Tepe Gawra; the temple in the Stratum XIX had buttresses projected outward on its north wall, having little constructive meaning; and, further, in the case of North Temple in the Stratum XIII (Fig. 8), buttresses were used only on the three sides which were exposed to the court and not on the north side which faced toward the back and could not be seen by the public. This particular arrangement was taken apparently mostly for visual effect of the building.

We may safely conclude that a temple building came into being in the Halaf-Period, first in *tholos* type, then in rectangular type, both derived from the contemporary type of dwelling, using the same materials. Regardless of its religious settings, e.g., altar and offering tables, the architectural peculiarity of the temple building was achieved by some arrangement of buttress projected outward which was first for just practical purpose, then for visual effect, losing its constructive meaning, and became widely used for monumental buildings later on, even influencing other regions in the Near East.

1

建築史上、記念的建築 (Monumental architecture) の最初の形態は神殿建築であつたと考えられる。今ここで古代メソポタミアにおける神殿建築の成立を論じようとするのも、一つにはこの理由からであり、又他方、この地域における神殿の出現が、他のどの地域よりも古

く、換言すれば他からの影響なくして神殿建築を生み出したのがこの地域だからである。それは今日から遠く六千年前に遡るのである。

先ず最初に 神殿建築とは何かということを考えておく必要がある。つまり発掘によつて露呈された建築遺址を前にして、いかなるものを「神殿」と判定するかと

* 建築学科 助教授

1) 本稿の概要は建築学会昭和 30 年春期大会 (5 月に発表されたが、字數その他の制限のため意をつくせなかつた。ここに少しく訂正を加えてその全文を発表するものである。

いう事である。この領域の設定を、私は以下の様に考えておきたい。

第一に、それは少くもその主要部について、人間の常住したものであつてはならないことである。即ちこれは消極的な条件であるが、又決定的なものである。したがって人間の常住を示す証跡や出土品の発見されぬ遺跡でなければならぬ。

第二に、積極的な条件としては、他の多くの遺跡にみられぬ配置関係又は施設、例えば供物台、祭壇等の存在、及び祭祀品や偶像の出土等があげられよう。勿論この二つの条件を共に満足せしめる遺跡は必ずしも多くないが、少くとも第一の条件は具えられていなければならぬと思う。

以上のような領域を訪定して、古代メソポタミアにおける成立期の神殿建築の概観を試みてみたいと思う。

2

遺跡に徴するに、最初に他の一般住宅と著しく相違する建物の出現は、ニネヴェ北方のアルパチャー遺丘(Tall Arpachiyah)においてであつた。²⁾ この遺丘には 10 の地位が確認され、その厚さは 10.5 m に達していたが、上位の 5 地位がウバイド期に属することが土器その他によつて知られ、その下位はハーフ期に属するものであつた。問題の建物の基礎は第 10 地位から第 7 地位に亘つ

て(上から数えて)遺丘上に 6 個、その周辺から 4 個発見されている。その最古の、即ち第 10 地位及び第 9 地位から発見されたものは、単に円形をなす石積の基礎から成っているが、第 8、第 7 地位になるにつれてその大きさを増し、又円形部の一部に縦長の矩形をなす部屋が附け足され、プランとしての発展を見せている。代表的なものとして第 7 地位のものをとると、ここには南北に位置して 2 個の円形プランの建物(その形からトーロス tholos とよばれる)が、矩形前室を含む建物の軸を略々直交させ、隣接して立っている(Fig. 1)。この中南のトーロスは部分的な発掘に終っているが、北のトーロスは全貌を現わしている。その東西の全長 19 m、トーロスの外径 10 m で、基礎は大型の玉砂利と砂岩とを固めたものから成っている。一つ重要なことは、北のトーロスは第

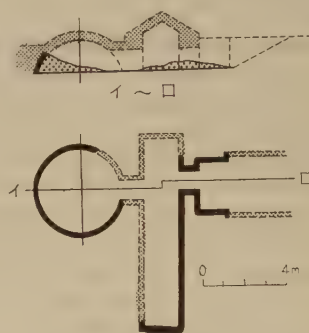


Fig. 2 アルパチャー, Fd V.2 のトーロス (Mallowan 及び Rose による)

8 地位のトーロスのプランをそのまま継承したものであり、又その下には第 9、第 10 地位のトーロスが重ついた事である。遺丘外のものとしては Fd V.2 地点のものが注目をひき、これは遺丘の第 8 地位に当るものとされるが、そのプランは互いに直交する二つの矩形前室を具えたトーロスに発展している(Fig. 2)。トーロスの内径は 4.25 m である。遺丘上のトーロスとの相違は、その基礎が全く練土(pisé)であつて、玉砂利からなるものではないことと、半地下式になつていた事であつた。

このトーロス型の建物が神殿とみなしうかどうかは重要な点であるが、以下のような状態を考慮するならば、何らかの宗教的建築と推定する発掘者の意見は、充分尊重されてよいと考えられる。

(a) この遺丘から発掘される住宅は殆どが矩形プランのものであつて、円形プランのものはなく、その点で特

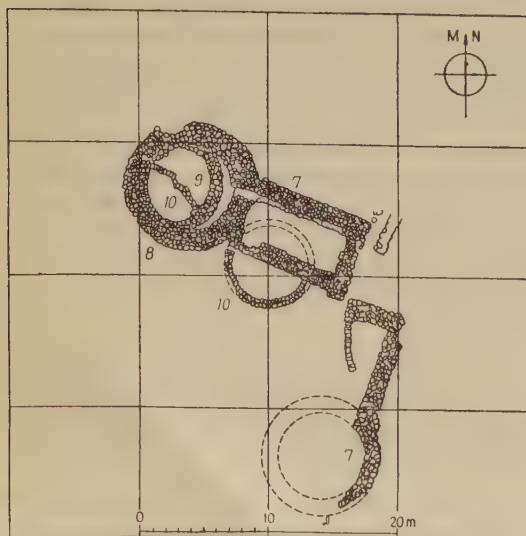


Fig. 1 アルパチャーのトーロス (Mallowan 及び Rose) による

2) 1933 年の発掘にかかる。Mallowan, M.E.L. & Rose, J.C., Prehistoric Assyria; The Excavation at Tall Arpachiyah (London 1935)

異な用途のものとされる。

(b) その位置が遺丘の中心、つまり聚落の中心にあつて、その社会的重要性が示唆されている。

(c) 同形の建物が、各地位を通じて殆ど同一場所であり、ある場合には同一基礎がそのまま次代の地位においても継承されて居り、これは他の後代の例から見ても神域の伝承との関係が考えられる。

(d) ある場合には (Fd V.2 地点の場合) 遺跡から多数の母神像が出土した。

(e) トーロス部分はドーム屋根と推定され、その起点とカーブとからみて内部の最高天井高は 1.5 m を越えず (Fig. 2 参照)、通例の住居として低きに失する。

その建物全体の復原には数案が提出されているが、トーロス部は練土のドーム状をなし、矩形前室は出土する木炭から、木材の小屋根の存在は推定されるが、その形態は不明である。しかし小屋根の存在から考えると、陸屋根か切妻屋根のどちらかが最も妥当ではないかと推定される (Fig. 3)。

上述したように、このアルパチャー遺丘はハラフ期からウバイド期に到る地位を含んでいるが、ト

Fig. 3 アルパチャーのトーロス復原案 (Mollownan 及び Rose による)

ーロス型の建物はハラフ期に限つて発見され、その後は跡をたつて居る。その年代は大体紀元前四千年期の前半と推定されている。

このトーロスと同系のものが、テペ・ガウラ (Tepe Gawra) にも発見されている。これはアルパチャーから東北、約 25 軒の地点にあり、1927 年以來、スペイザーによつて発掘され、³⁾ 更に 1937 年以後、デラウガズとバックとによつて深く基底まで掘り下げられた。⁴⁾ 26 の地

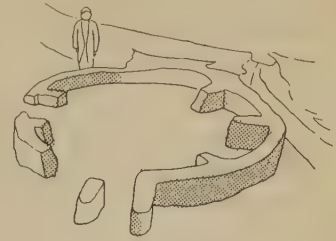


Fig. 4 テペ・ガウラ第 XVII 地位のトーロス (Tobler による)

位が確認され、その第 25 から第 20 に到る地位がハラフ期であり、問題のトーロスは第 20 地位から第 11 地位にかけて断続し乍ら現われている。その代表的なものはウバイド期に属する第 17 地位の 2 個のトーロスで、その南部のものは壁厚 30 cm、内径 4.25 m で疑いなくドーム状のもので泥煉瓦積、内側に数個の控壁 (buttress) が突出している。北部のトーロスはこれより少しく大型で、入口部分が前室状に延び、アルパチャーのトーロスのプランと類似している (Fig. 4)。このトーロスの使用目的はここでも明瞭ではないが、以下のような点からみてやはり宗教的機能を有していたものとみてよい。

(a) 普通住宅のプランは円形ではない。

(b) アルパチャー等と同様に、トーロスは相異つた地位で相重つて発見され、神域の伝承がここでもみられる。ウバイド期の第 11 地位 A には、外径 19 m の円形プランの家が、周囲に群がる小さな住宅の中に目立っていた。外壁の厚さ 1 m、内部は矩形の主室を中心にして合計 17 の小室に分れ、その一室には穀倉も含まれていた。⁵⁾ これは一方において砦の如きものとも見られるが、いずれにしてもトーロスの伝承はここでもその後絶えて居り、それに代つて矩形神殿が現われている。

矩形神殿の考察には入る前に、以上のべたトーロス型神殿の意義をみておきたい。大体、ピゼによる建築の出現は極めて唐突のものであつた。即ち 1950 年から 51 年にかけてブレイドウッドによつて明かにされたジャルモ遺蹟 (Jarmo) は、⁶⁾ 同じく彼によつて調査されたカリム・シャヒル (Karim Shahir)⁷⁾ を若干の間隙をおいて継ぐ

3) Speiser, E. A. Excavation at Tepe Gawra, Vol. I (Philadelphia, 1935)

4) Tobler, A. Excavation at Tepe Gawra, Vol. II (Philadelphia, 1950)

5) Tobler, op. cit. Pl. VI 及び VII

6) アッスールの東方約 160 軒、ザグロス山脈の麓に当る。Braidwood, R.J. Excavation in Iraqi Kurdistan (Sumer, Vol. VII, No. 2, 1951), p. 103

7) Braidwood, op. cit.

ものであるが、カリム・ジャヒルでは不規則な形をなす敷石住居地が確認されたのみで、その他の何等の住居の証拠が発見されなかつたが、ジャルモでは数室からなる住居が発見されている。これらは角型のもので竈を有し、その煙道を備えていた。また土器はなく、それに代つて床に焼き入れられた穴が、穀類の貯蔵に使用されていた。ここからは母神像等は出土したが、神殿とみられる建物の跡はない。この遺跡は紀元前 5,000 年前後のものと推定されている。

又一方、ハッスーナ (Hassuna)⁸⁾ の第 1 地位の a では居住址を示す炉と、葦の敷物の跡とが発見されるのみで、木柱による天幕式の平地住居の存在が示唆されているが、第 1 地位 b には唐突にピゼの住居が現われているのである。ただここでは最も古いものは単室であり、漸次部屋数を増している過程がみられる。ここで注意すべきことは独立したトーロス状の建物がみられることで、内径約 5 m、内部仕切りがあり、上述のテペ・ガウラ第 17 地位のトーロスと類似しているが、中に竈が幾つか設備され、土器を出土し、明かに数家族によつて住われた住宅であつたと認められていることである。ここでも他に神殿らしい建物の跡は発見されていない。

尤も遺蹟のないことが神殿のない事を必ずしも証明するものではない。神殿が仮設的な建物であつたならば、それは殆ど何等の証拠を残さないからである。ともあれここで明かにしておきたいことは、トーロス型神殿が神殿建築として最古のものである点と、当時の住宅が同じ材料を用い乍ら角型プランのものが普通であり、円形プランのものは稀であつたこと、及びトーロス型神殿はウバイド期までみられるが、その後は跡を絶つてしまつたことである。換言すれば最初のトーロス型神殿も円形プランの住居に由来するものであろうし、又住居が角型プランへ移るにつれて、神殿もトーロス型から角型プランへと移行したとみられることである。

元来、円形プランの建物は独立的、完結的であつて、空間の拡張や追加が困難であつた。したがつてその機能内容が複雑になるにつれて、より多くの空間が必要となつてくれば、建築形態として（特に建築の材料、構造の未発達な段階では）不適当となるを免れなかつた。ハッス

ーナ第 1 地位 b で漸く見られた円形プランの住居も、その後殆ど姿を消すのも当然であり、アルパチャー遺跡にみられたようにトーロス型神殿において、空間の増加が矩形プランの建物を追加することによつて漸く達せられたのも止むをえなかつたのである。

トーロス型の神殿の屋根がドーム型をなしていたことについては、アルパチャー遺丘周辺の例がこれを示していることは上述したが、この場合、径 4 m で、高さ 1.5 m のドームをピゼで築く事は決して容易ではない。ここではその三分の一が地下に築かれていたという特殊事情のために、ドーム下辺の横圧がトーロスの周囲の地山によつて支持されたのである。テペ・ガウラ第 17 地位のトーロス神殿にみられる控壁は、発掘者は小屋組を支える柱の基台であろうとみているが、⁹⁾むしろ下辺の横圧に処するための控壁とみるのが自然であろう。壁を補強するための控壁の存在は、ハッスーナ第 4 地位の住宅、即ちハラフ期以前の住宅において間仕切りと無関係に造られているからである。¹⁰⁾

トーロス型神殿の外観は極めて単純なものであつたとみられる。ここには特に神殿建築としての性格を示唆する、何等の独特の表現はなかつたものとみてよく、控壁も内部にのみ用いられ、構造上の役割以上のものではなかつたのである。

3

角型プランの神殿の発展を考察するに当つて、最も重要な遺蹟はエリドゥ (Eridu) であろう。¹¹⁾ エリドゥはバズラの西方約 170 km に当り、メソポタミア南部低地帯における最古の開拓地の一つであつた。その第 16 地位（地表から数えて）以下の基層は前アルウバイド期とみられ、その特徴ある土器はエリドゥ土器とよばれている。最古の角型プランの神殿はその第 17 地位に発見されたもので、一辺約 3 m の略々正方形のプランで、中央に方形の供物台を有し、又相接する二つの壁の中央内側に控壁があるのみで、壁の外面には何の突出物もない。独立して建てられて居り、その出入口は不明乍ら、已に崩れ去つて壁体の不明な東面か北面に（他に出入口が北面にある例はないので恐らく東面に）、しかも中心を外し

8) Braidwood, A Southern Variant of the Hassunan Assemblage, excavated in 1948 (*Journal of Near Eastern Studies*, Vol. XI, 1952)

9) Tobler, op. cit. p. 42

10) Braidwood, op. cit. (*Journal of N. E. Studies*, Vol. XI, 1952) Fig. 36

11) Lloyd, S. & Safar, F. Eridu (*Sumer*, Vol. III, No. 1, Baghdad 1948, 及び同誌 Vol. IV, No. 2, 1948), p. 119-125, Pl. VI

であつたものであろう。というのは壁体の中心には控壁があつた筈だからである。この建物は中心の供物台の存在から推して、何らかの、恐らく後のエリドゥの神殿の祭神 Ea を祀つたものであろう。二つの壁面の中心内側に出ている控壁は、壁の補強のためとも、又小屋組の梁を渡すためのものとも考えられる。いずれにしても全く構造上の必要からのものであつた。

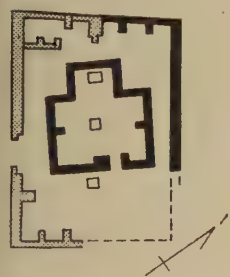


Fig. 5 エリドゥ第 XVI 及び第 XV 地位の神殿 (Lloyd 及び Safar による)

こでも控壁が主室短辺と、長辺側の入口をはさんで夫々設けられている。この神殿は長めのプリズム状の陽乾煉瓦で築かれ、壁厚は半枚積で控壁は煉瓦一枚を突出させている。この神殿内部が泥で仕上げ塗をされていることは、神殿内部に向けられた関心の深さを示すものとして重要な前進であつた。

上述の二つの小神殿において共通なことは、その主室が共に一室で方形に近いものであること、主室の中心に供物台があること、出入口が中心を外してつけられていること、及び控壁が内側に、恐らく単に実用上の意味で用いられている事等であつた。

第 15 地位には、丁度上述の第 16 地位の神殿の位置に、これを中に取込んでつと大きな神殿が発見された (Fig. 5)。これもそのプランは方形に近い矩形をなし (1:1.51)、アルコーブはない。出入口は長辺の中心を少し外した位置にあつて、両短辺にのみ控壁がある。先にふれたように、控壁の意義は二通りが考えられる。即ち一つは壁体の補強のため、一つは横架材の支持のためとみられるが、この場合の短辺にのみ、しかも間隔がせまく配列されたこれらの控壁は、そのどちらの意味をも有していないように見受けられる。というのは、もしそれが壁体の補強のためならば、矩形の短辺よりも長辺こそ補強さるべきものであろうし、又もしそれが横架材の支

持のためならば、横架材が短辺から短辺に渡されることは、通例考えにくく、横架材はむしろ長辺から長辺へ渡されるべきであり、その点からも短辺の控壁は、その構造上の理由が薄弱に思われる。したがつてこれらの短辺にみられる控壁は、単に構造上の意義からのみ考えることは妥当ではなく、何等かの内部の視覚的、又は祭祀上の理由を想定することは、さほど無謀とは思われない。第 16 地位の神殿では内部が特に入念に仕上げられたが、ここに到つて更に一步前進して、それまで構造上の理由からのみ用いられてきた控壁が、室内内に短辺部分のいわば荘厳に使用されたらしいことは、¹²⁾ 将来の神殿建築にとつて、極めて重要な意義を有するものであつたといふべきである。

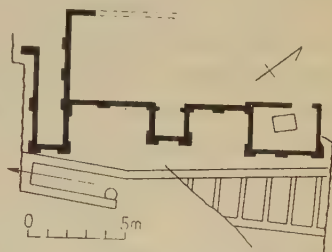


Fig. 6 エリドゥ第 XI 地位の神殿 (Lloyd 及び Safar による)

エリドゥの上記の三種の小神殿は、明かに同一系のものの発展とみられるが、第 11 地位の XI 神殿になると、それはかなり複雑なものに進展している。もはや単純な一室のものではなく、小部屋を有し、全体が広い基壇 (platform) の上に建っている (Fig. 6)。主室は漸く細長い矩形 (1:2.87) になり、長辺に二室がつけ足され、その端の一室には供物台がある。短辺には細長い廊下状の部屋が接し、主室との間には嘗て出入口が訪けられてあつたらしい。発掘された限りではこの神殿の主要出入口は不明であるが、基壇には建物の長辺に平行にランプがあつて、長辺が正面であつた事を示唆している。控壁は全壁面にあるが、突出が少く、又総てが外部に突出し、内部に突出したものはなくなつた。このような基壇の出現や、建物の外面が明瞭に意識され出したこと、及び主室の異常な細長化等は極めて重要な進展であつた。

これにつづく第 9 地位の神殿は、略々第 11 地位のものを継承しているが、短辺の壁によせて祭壇が発見され、建物の基壇も正面前方に充分な広さをとつて整備されている。これに続く第 8 地位から第 6 地位の神殿は、第 9 地位及び第 11 地位の神殿の原型により乍ら、かなり性

12) 後になると短辺の側に祭壇がおかれ、短辺側の壁面が祭壇の背景をなしている。

格を異にし、壁体は著しく厚みを増し、プランの左右のシムメトリーも漸く現われ、プランは主室を中心に、両側に小部屋を有する3列併列型のものとなり、壮麗なものへと発展しているのであった。

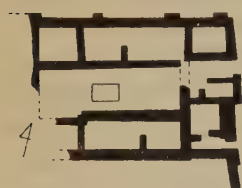


Fig. 7 テペ・ガウラ第 XVIII 地位の神殿 (Tobler による)

細長い矩形プランの主室を中心とする神殿は、テペ・ガウラにも見られる。即ちその第 19, 18 地位のもので、ウバイド期にぞくし、その主室の両辺の比は 1:3.27, 中央に祭壇がある (Fig. 7)。特に注目すべきことは、控壁がその北側のみ見られ、必ずしも構造上の必要からとのみ言えない事実であろう。その最も明瞭な証跡は、同第 13 地位の「北神殿」であつて (Fig. 8)、これは広場に接し、その南面を広場に面して建っている。即ちこの「北神殿」において控壁は広場に面した三面にのみ用いられていて、北面には全く見られない。したがってこの場合、控壁が広場から見られ易い壁面にのみ用いられ、構造上の役割をもつものでないことは明かである。しかもテペ・ガウラで重要な事は、かかる矩形主室を有するプランが、単に神殿特有のものではないという事であつて、たとえば第 15 地位の住宅に神殿と同一プランで同一材料のものがみられるのである。矩形主室を中心とする神殿の型が、更にウルク期において発展し、ジェームスデッド・ナスル期をへて、サルゴン王朝の壮大なチグラットに発展する経過は、嘗て碩学ハインリッヒ教授によつて論じられたことがあるので、¹³⁾ も早これ以上ここに蛇足を加える必要はないであろう。

以上を要するに角型プランの神殿建築は先ず方形プランから出発し、漸次矩形プランに向い、両辺の比は時代と共に増し、益々細長化の傾向をみせている。出入口が長辺に、しかも中心を外しておかれ、即ち長辺を正面にしたことは、少くもこれまでのべた成立期における神殿

建築については言いうるようである。¹⁴⁾

古代メソポタミアをはじめ、エジプト古王国時代に普くみられる控壁を並置した壁面構成については、ここにその発展の経緯がみられることは極めて重要であつて、この事はこの地がかかる構成の発祥地である事を示唆しているのである。¹⁵⁾ 吾々のいいうる事は、恐らくそれが構造上の理由から発生したにしても、やがてその意味を失い、先ず内部の荘厳に用いられ、次いで外部に現われ、しかも衆目の届く目立つ範囲にのみ用いられ、裏面においては省略される場合もあつたのである。ここでは明瞭に神殿外観の視覚効果が意図されたのであつた。しかもそれに関連して重要な事は基壇の発生であつた。この基壇は後のチグラットを生む母胎となつたものであり、当時の宗教的意味の「聖山」を象徴するものであるとしても、¹⁶⁾ それによつて神殿の建物が一段と高所に据えられ、周囲から仰ぎ見られる条件が生み出され、一層の視覚的考慮が要求され始めたといいうるのである。

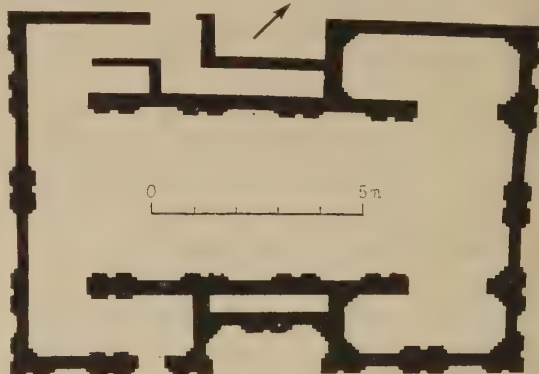


Fig. 8 テペ・ガウラ第 XVIII 地位の北神殿 (Tobler による)

もともと角型プランの神殿も、要するに当時の一般住宅に起原を有し、プランにおいても、材料や構造においても同質のものであつた。しかし控壁が外面に視覚的效果を意図して現われてくる頃になると、漸く住宅建築に決別して、独特の表現をとるに到つている。ここで取扱

- 13) Heinrich, E. Stellung des Uruk Tempels in Baugeschichte (*Zeitschrift für Assyriologie und vorderasiatische Archäologie* N. F. Bd. XV, Berlin 1950) 及び拙稿ウルク神殿について (古代学, Vol. III, No. 4, 大阪 1954)
- 14) 短辺を正面とする神殿は、テペ・ガウラ第 8 地位 (ジェームスデッド・ナスル末期) にみえているが、結局この方向には発展しなかつた。Speiser, E. A. op. cit.
- 15) Frankfort, H. The Birth of Civilization in the Near East, (Bloomington 1951), Appendix p. 103-105
- 16) Frankfort, H. op. cit. p. 54

つたようなごく初期の場合は、控壁はまだその本来の構造的意味をすて切らず、その用いられている場所は建物の四隅とか、壁の中央部等に限られていた。元来かかる重厚な積柱(pier)を用いた場合、積柱が支持体となるから、積柱間の壁は厚い事を必要としないし、又吾々には実際より薄く見られるものである。エリドゥ第9地位までの神殿においては、事実壁体は比較的薄く、後にみられるような重厚なものではなかつた。しかし後世において発展したものは、このような薄い、いわばカーテン・ウォールの傾向のものではなくて、壁は益々厚く、控壁間の間隔は益々せばまる方向、つまり極端にまで重厚な方向へと向つたものであつた。それは単なる見せかけではなく、あくまで現実に大きく、太く、重く、又高いものへと進んだのである。それをのべることはもはや本稿の範囲を脱するので、別稿に期することとしたい。

4

以上は古代メソポタミアにおける神殿建築の成立を概観したのであるが、これらの神殿にいかなる神が祀られたかは確かでない。しかし例えばエリドゥでは、ずっと後世における神殿が智の神であり、魔術や医薬の神であり、清冽な水の神である Ea (又は Enki, Nudimmut) を祀つて居ることと、かかる伝統が決して新しいものではないことから、前述のエリドゥ神殿における主神もこの Ea とみなすことができよう。即ちエリドゥの供物台には魚の滑が多くみられ、これは Ea の信仰を裏書きするものであつた。いずれにしても、かかる神殿は、主神の如何による差がなく、神殿として使用されたものの様である。¹⁷⁾ (1955年5月)

17) Frankfort, H.; *The Art & Architecture of the Ancient Orient*, (Baltimore, 1955) p. 3-4

平面弾性問題に於ける特異点に就いての覚書

(1955 年 6 月 3 日受理)

長 尾 弘

A Note on the Singular Points in the Two-dimensional Problem of Elasticity

By Hiroshi NAGAO

Studies on the singular points in the two-dimensional problem of elasticity were made by several authors. However, rigorously speaking, they seem to be insufficient, or sometimes even incorrect in some points of their conclusions.

The present author treats analytically the zero points of singularity of n th order appearing within the domain of elastic body and elucidates many features of the stress-trajectories near the zero points, neglected by many other writers.

1. 序 論

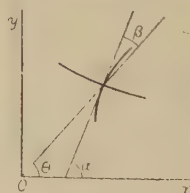
n 次曲面の主曲率曲線に現われる特異点について古く Darboux¹⁾ が 3 次曲面と Fresnel の音波曲面について解析を行つたものがあるが、 n 次曲面に現われる特異点と二次元弾性問題に於ける応力曲線の応力函数が n 次の場合の特異点とは同じ性質のものであるといわれている。二次元弾性問題の特異点の研究は 1930 年 L. Föppl が零点につき初めて解析を行い、1 次²⁾ と 2 次³⁾ の数種の零点につき応力曲線の形状を明にした。続いて奥田博士⁴⁾ により震点のみならず極、不連続点等についても解析が行われ、特に階数を導入して特異点の種類を判定する有力な根拠を確立した。時を同じくして Садовский⁵⁾ が極坐標にて一般 n 次の特異点の解析を行い階数、直交線数のみより特異点を完全に類別した。更に 2, 3 年後 von Mises が 1 次⁶⁾、2 次⁷⁾ の零点の解析を別個の立場から行つて、巧な方法で応力曲線の形状の種類を明にした。然しこれ等の人々の研究は夫々異つた解析により特異点の性質並に種別を列挙したものであるが、重複するとか、又未だ不備不足に思われる点も多くみられる。

本研究はこれ等の著者の研究結果を綜合する意味で、不備の点を補い、或いは巧な点を利用して、先ず手初めに弾性体内部に現われる零点についての解析を行つたものである。極坐標を採用して一般の n 次の零点の種別を階数、直交線の数並びに直交線の種類により類別し、今

迄知られなかつた 3 次以上の零点に現われる応力曲線の形状を明にした。又直交線間の角度及び不定線についても少しく言及した。そして最後に 1 次、2 次の零点について例題的に全種類の応力曲線の形状を挙げ他の研究結果と比較した。

2. 特異点の定義と一般的性質

A) 特異点の定義と類別



第 1 図
主応力方向

第 1 図の如く直角坐標 x, y を取り任意点の応力成分を $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ とすると、主応力方向と x 軸とのなす角 α は

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2-1)$$

この α が不定となる点を特異点と呼び、次の三種に別ける。

- 零点—— $\sigma_x - \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ なる点
- 極—— $\sigma_x - \sigma_y$ 及び τ_{xy} の一方又は両方が無限大となる点
- 不連続点——応力成分の何れかが有限不連続となる点

B) 特異点の次数

二次元応力問題の Airy の応力函数 F は極坐標の原点を問題の特異点とすると、原点の極く近くでは r の高次の項が存在する場合にも、高次項は低次の項に比べて省略出来るから、弾性体内部の原点に外力が作用する場合及び変位に dislocation の生ずる場合* を除き次の式で

* これ等の場合には応力函数の式に $\log r$ の因子が入る場合がある。例えば圧縮中心に於ける $\log r$ 、回転中心に於ける $r^2 \log r$ 、半径 r の円に於て働く平衡した力に依る応力を与える応力函数 $r \log r \cos \theta$ 、その他 $\theta \log r, r^2 \theta \log r, r \log r \theta \cos \theta$ 等々。

示される。

$$F = r^{n+2} f(\theta) \quad (2-2)$$

但し $f(\theta)$ は θ の函数、 n は任意の整数である。然るに応力は次式で示されるから

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

(2-2) を (2-3) に入れると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= r^n \{ f'' + (n+2)f \} \\ \sigma_\theta &= r^n (n+2)(n+1)f \\ \tau_{r\theta} &= -r^n (n+1)f' \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ は何れも r^n を因子として持つから原点は $n > 0$ ならば零点、 $n = 0$ ならば通常点又は有限不連続点、 $n < 0$ ならば極となる。そして n を特異点の次数という。

C) 特異点の階数

任意の閉曲線 c 上の点の一組の応力曲線の方角を α とする時

$$j = \frac{1}{\pi} \oint_c \frac{\partial \alpha}{\partial s} ds \quad (2-5)$$

で示される j を閉曲線 c の特性を表す階数という。特

異点を内部に含まない閉曲線の階数は零であるが、特異点を含む場合は零又は整数となる。従つて閉曲線内に一個の特異点を有する時、この閉曲線の階数をこの特異点の階数と呼び特異点の特性を示す。

D) 特異点の近傍に於ける応力曲線の性質

$\tan 2\alpha = f(x, y)$ と置くと $\tan \alpha$ は 2 価函数で一つを $\tan \alpha_A$ 、他を $\tan \alpha_B$ とする。 $dy/dx = \tan \alpha_A$, $dy/dx = \tan \alpha_B$ なる 2 つの微分方程式を積分して得られる 2 組の曲線群を夫々 A 組及び B 組の応力曲線群と云い、総ての点で A 組 B 組の応力曲線は互に直交する。従つて同一の組に属する応力曲線は互に相交ることはない。又特異点を含まない領域では 2 組の応力曲線の方向の 2 つの主応力の大小関係は一定である⁴⁾。

第 1 図に示すように角 β を

$$\beta = \alpha - \theta \quad (2-6)$$

とすると $\tan 2\beta$ の値は特異点を原点とする極坐標で次の式で示される。

$$\tan 2\beta = \frac{2(n+1)f'}{n(n+2)f - f''} \quad (\text{後出})$$

即ち r に無関係の式であるから、特異点を通る任意の放射線附近に於ける応力曲線の形状は $\alpha, \beta, \partial\alpha/\partial\theta, \partial\beta/\partial\theta$ の値のみによつて決まる。特に $\tan 2\beta = 0$ となる放射線附近の応力線図をしらべると特異点の性質を見極め

名称及記号	(i) Asymptote A	(ii) Leitgeraden L'	(iii) Leitgeraden L''	(iv) Leitgeraden L'''	(v) Tangente T	(iv') 混合せるもの AL'	(iv') 混合せるもの AL''	(v') 混合せるもの TL'	(v') 混合せるもの TL''	反曲線 Wendepunkt W
附近の 応力線図										
直交線 上での 条件	$\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} < 0$	> 0	> 0	> 0	> 0	$= 0$	$= 0$	> 0	> 0	反曲線上 で $= 0$
条件	$\frac{\partial \beta}{\partial \theta} (< 0)$	< 0	< 0	< 0	> 0	(< 0)	(< 0)	$= 0$	$= 0$	(< 0)
零点の $\alpha - \theta$ 曲線と $\tan 2\beta$ $= 0$ との交り方		なし						なし		

第 1 表 特徴ある放射線 (直交線) 附近の応力曲線

ることが出来る。この放射線を直交線と呼び、この直交線上では $\tan 2\beta = 0$ であるから直交線は 1 組の応力曲線群と垂直に交わり、他の組の応力曲線群と平行に交わる。第 1 表に直交線附近の応力曲線の形状に関する種別を示す。

本表に於て特に記したい事は $\partial\alpha/\partial\theta = 0$ の場合も $\partial\beta/\partial\theta = 0$ の場合も、何れも二階微分 $\partial^2\alpha/\partial\theta^2, \partial^2\beta/\partial\theta^2$ は零

とはならない事が必要であり、 $\partial^2\alpha/\partial\theta^2 = 0, \partial^2\beta/\partial\theta^2 = 0$ の場合にはこの放射線より僅か離れた所の $\partial\alpha/\partial\theta$ 、又は $\partial\beta/\partial\theta$ の符号によつて上表により種別を判定する。(ii) と (ii'), (iv) と (iv'), 並びに (v) と (v') の相違は隣りに T なる直交線があるかないかの違いである。又表中 () のついた条件は他の条件即ち $\partial\alpha/\partial\theta$ の条件より必然的に成立することを意味する。最後の列に示した反曲線と

は $\tan 2\beta$ が或る有限の値を持ち $\partial\alpha/\partial\theta=0$ となる輻射線と呼ぶ。 $(\partial^2\alpha/\partial\theta^2 \neq 0)$ 特徴ある輻射線として特に取り上げてみた。

任意の輻射線上で $\partial\alpha/\partial\theta > 0$, 又は < 0 なるに従い応力曲線が夫々凹又は凸であると呼ぶ。任意の点を通る二つの応力曲線を夫々 A 及 B とすれば, $\partial\alpha_A/\partial\theta = \partial\alpha_B/\partial\theta$ であるから A 及 B のうち, 一方が凹他が凸となることはない。

3. 弾性体内部に現れる零点

A) 主応力の方向の極坐標による表現

二次元応力問題に於ける Airy の応力函数 F は重調和函数である。即ち

$$\nabla^4 F = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) F = 0 \quad (3-1)$$

(2-2) を (3-1) に入れると

$$f'''' + \{(n+2)^2 + n^2\} f'' + n^2(n+2)^2 f = 0 \quad (3-2)$$

$$\begin{aligned} \tan 2\beta &= \frac{2(n+1)f'}{n(n+2)f - f''} = \frac{-2(n+1)na_0 \sin n\theta - 2(n+2)(n+1)b_0 \sin(n+2\theta + \delta)}{2(n+1)na_0 \cos n\theta + 2(n+2)(n+1)b_0 \cos(n+2\theta + \delta)} \\ &= -\frac{c \sin n\theta - \sin(n+2\theta + \delta)}{c \cos n\theta - \cos(n+2\theta + \delta)} \end{aligned} \quad (3-6)$$

但し

$$c = -\frac{n}{n+2} \frac{a_0}{b_0} \quad (3-7)$$

又 $\tan 2\alpha$ は (2-6) より次の式で示される。

$$\tan 2\alpha = \frac{\tan 2\beta + \tan 2\theta}{1 - \tan 2\beta \tan 2\theta} = -\frac{c \sin n-2\theta - \sin(n\theta + \delta)}{c \cos n-2\theta - \cos(n\theta + \delta)} \quad (3-8)$$

B) 階数及び直交線数による零点の類別

(3-8) を微分し $\partial\alpha/\partial\theta$ を求めると

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} = -\frac{1}{2} \frac{(n-2)c^2 + n - 2c(n-1)\cos(2\theta + \delta)}{c^2 + 1 - 2c\cos(2\theta + \delta)} = -\frac{1}{2} (n-1) + \frac{c^2 - 1}{c^2 + 1 - 2c\cos(2\theta + \delta)} \quad (3-9)$$

従つて (2-5) より階数 j は

$$j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial\alpha}{\partial\theta} d\theta = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{n-1}{2} d\theta + \frac{c^2 - 1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{c^2 + 1 - 2c\cos(2\theta + \delta)} = -(n-1) + \frac{c-1}{|c-1|} \quad (3-10)$$

即ち

$$\left. \begin{aligned} c > 1 \text{ の場合 } j &= 2-n \\ c < 1 \text{ " } j &= -n \end{aligned} \right\} \quad (3-11)$$

直交線の数 A については, 直交線の式は $\tan 2\beta = 0$ であるから (3-6) より

$$c \sin n\theta - \sin(n+2\theta + \delta) = 0 \quad (3-12)$$

この式を満足する θ の $0 \sim 2\pi$ 範囲の根の数は $2n+4$ 以

この微分方程式の解は $n \neq 0$, 又は $n \neq -2$ の場合には坐標の基線を選ぶと

$$f(\theta) = a_0 \cos n\theta + b_0 \cos(n+2\theta + \delta) \quad (3-3)$$

$n=0$, 又は $n=-2$ の場合には (3-2) は次のようになり

$$f'''' + 4f'' = 0$$

この微分方程式の解は

$$f(\theta) = a_0 + b_0\theta + c_0 \sin(2\theta + \delta)$$

前に述べた如く弾性体内部の零点に関する限りは応力函数は (2-2) で充分であり, 従つて $f(\theta)$ は (3-3) で示されたものとなり, 結局 F は

$$F = r^{n+2} \{a_0 \cos n\theta + b_0 \cos(n+2\theta + \delta)\} \quad (3-4)$$

又 $F(\theta) = F(\theta + 2\pi)$ でなければならぬから n は正の整数である。

一般に

$$\tan 2\beta = \frac{2\tau_{r\theta}}{\sigma_r - \sigma_\theta} \quad (3-5)$$

この式の右辺に (2-3), (3-3) を入れると

下であり, 又少くとも $2n$ はある⁵⁾。従つて, この場合応力曲線は原点に関して対称であるから直交線の数⁶⁾は複数でなければならぬ故, 直交線の数 A は $2n+4$ か $2n+2$ か $2n$ である。更に (3-6) を微分して $\partial\beta/\partial\theta$ を求めると

$$\frac{\partial\beta}{\partial\theta} = -\frac{1}{2} \frac{c^2 n + n + 2 - 2c(n+1)\cos(2\theta + \delta)}{c^2 + 1 - 2c\cos(2\theta + \delta)} \quad (3-13)$$

この式で右辺の分母 > 0

$$n \text{ 分子 } \geq c^2 n + n + 2 - 2c(n+1) = (c-1)\{nc - (n+2)\} \quad (3-14)$$

従つて

$$\left. \begin{array}{l} c < 1 \quad \text{ならば} \quad \frac{\partial \beta}{\partial \theta} < 0 \text{ となり, 階数 } j = -n \text{ で直交線数 } A = 2n + 4 \\ c > \frac{n+2}{n} \quad \text{ " " " " " } j = 2 - n \quad \text{ " " } A = 2n \\ \frac{n+2}{n} > c > 1 \quad \text{ " } \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \geq 0 \text{ 何れともなる, " } j = 2 - n \quad \text{ " " } A = 2n + 4 \\ \hspace{15em} = 2n + 2 \\ \hspace{15em} = 2n \end{array} \right\} \quad (3-15)$$

(3-11), (3-15) の結果を綜合して, 階数並びに直交線の数のみより特異点を類別すると, 次の N なる数が特異点の種別の次数 1 より ∞ に亘る通し番号として求められる⁵⁾.

$$N = \frac{1}{2}(11n + j - A - 2) \quad (3-16)$$

ここに A は直交線の数を示す. この式の次数の低い所の計算例を示すと第 2 表のようになる.

第 2 表 階数, 直交線数による種別

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4
j	-1	+1	+2	+1	-2	0	0	0	-3	-1	-1	-1	-4	-4
A	6	6	4	2	8	8	6	4	10	10	8	6	12	12

C) 直交線の種類を考慮しての類別

直交線附近の応力曲線の形状を考慮して零点の種別を更に詳しくしらべてみる. 先ず $c=0, 1, \infty$ なる特別の場合から始めよう.

$c=0$ の場合

$$(3-8) \text{ より } \tan 2\alpha = -\tan(n\theta + \delta)$$

$$\text{従つて } \alpha = -\frac{n}{2}\theta - \frac{\delta}{2}$$

$$\text{又 } = -\frac{n}{2}\theta - \frac{\delta}{2} + \frac{\pi}{2}$$

この式に次の変数変換をする. 即ち $\alpha + \delta/(n+2) = \alpha'$,

$\theta + \delta/(n+2) = \theta'$ と置くと

$$\alpha' = -\frac{n}{2}\theta'$$

$$\text{又 } = -\frac{n}{2}\theta' + \frac{\pi}{2}$$

応力曲線の微分方程式は

$$\frac{rd\theta}{dr} = \frac{rd\theta'}{dr} = \tan(\alpha - \theta) = \tan(\alpha' - \theta') = -\tan \frac{n+2}{2}\theta'$$

$$\text{又 } = \cot \frac{n+2}{2}\theta'$$

これを積分すると

$$\log r = -\frac{2}{n+2} \log \left(\sin \frac{n+2}{2}\theta' \right) + \text{const.}$$

$$\text{又 } = -\frac{2}{n+2} \log \left(\cos \frac{n+2}{2}\theta' \right) + \text{const.}$$

従つて応力曲線の方程式は次のようになる.

$$\left. \begin{array}{l} r^{(n+2)/2} \sin \frac{n+2}{2}\theta' = \text{const.} \\ \text{又 } r^{(n+2)/2} \cos \frac{n+2}{2}\theta' = \text{const.} \end{array} \right\} \quad (3-17)$$

$c=1$ の場合

(3-8) より

$$\begin{aligned} \tan 2\alpha &= -\frac{\sin n-2\theta - \sin(n\theta + \delta)}{\cos n-2\theta - \cos(n\theta + \delta)} \\ &= \frac{2 \cos \left(\frac{n-1}{2}\theta + \frac{\delta}{2} \right) \sin \left(\theta + \frac{\theta}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{n-1}{2}\theta + \frac{\delta}{2} \right) \sin \left(\theta + \frac{\delta}{2} \right)} \end{aligned}$$

従つて $\sin(\theta + \delta/2) = 0$ 以外では

$$\tan 2\alpha = \cot \left(\frac{n-1}{2}\theta + \frac{\delta}{2} \right) \quad (3-18)$$

$\sin(\theta + \delta/2) = 0$ では $\tan 2\alpha$ は $0/0$ の不定となり, 特異点の集つた特異線となる. 然し $(n+1)$ 次以上の応力が存在する場合には当然この項も考慮せねばならぬ. この事に就いては後で述べることにして, 今は $n+1$ 次以上の応力を考えずに応力曲線の形状をしらべることにしよう. (3-18) より

$$\alpha = -\frac{n-1}{2}\theta - \frac{\delta}{4} + \frac{\pi}{4}$$

$$\text{又 } = -\frac{n-1}{2}\theta - \frac{\delta}{4} + \frac{3}{4}\pi$$

これに

$$\alpha + \frac{\delta - \pi}{2(n+1)} = \alpha', \quad \theta + \frac{\delta - \pi}{2(n+1)} = \theta'$$

なる変数変換をすると

$$\alpha' = -\frac{n-1}{2}\theta'$$

$$\text{又 } = -\frac{n-1}{2}\theta' + \frac{\pi}{2}$$

応力曲線の微分方程式は

$$\frac{rd\theta'}{dr} = -\tan \frac{n+1}{2}\theta'$$

(3-6) で $\tan 2\theta=0$ とすると

$$c \sin n\theta - \sin(n+2\theta+\delta) = 0 \quad (3-25)$$

直線 $\alpha=\theta$ ($\tan 2\theta=0$) に $\alpha-\theta$ 曲線が切する為には上式を θ で微分して

$$cn \cos n\theta - (n+2) \cos(n+2\theta+\delta) = 0 \quad (3-26)$$

(3-25) と (3-26) より θ を消去する. (3-25), (3-26) を夫々辺々自乗して加えると

$$c^2 \left\{ \sin^2 n\theta + \left(\frac{n}{n+2} \right)^2 \cos^2 n\theta \right\} = 1$$

これより

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 n\theta &= \frac{(n+2)^2(c^2-1)}{4(n+1)c^2} \\ \sin^2 n\theta &= \frac{(n+2)^2-c^2n^2}{4(n+1)c^2} \end{aligned} \right\} \quad (3-27)$$

従つて

$$\theta = \frac{1}{n} \cos^{-1} \left(\pm \frac{n+2}{2c} \sqrt{\frac{c^2-1}{n+1}} \right) \quad (3-28)$$

更に (3-25), (3-26) を次のように変形し

$$c \sin n\theta = \sin(n+2\theta) \cos \delta + \cos(n+2\theta) \sin \delta$$

$$c \frac{n}{n+2} \cos n\theta = \cos(n+2\theta) \cos \delta - \sin(n+2\theta) \sin \delta$$

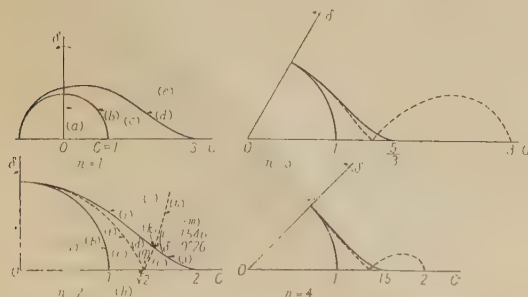
この第一式に $\cos(n+2\theta)$, 第二式に $\sin(n+2\theta)$ をかけて辺々相引くと

$$c \left\{ \sin n\theta \cos(n+2\theta) - \frac{n}{n+2} \cos n\theta \sin(n+2\theta) \right\} = \sin \delta$$

この式に (3-27), (3-28) を入れると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{(n+2)^2-c^2n^2}{n+1}} \cos \left\{ \frac{n+2}{n} \cos^{-1} \left(\frac{n+2}{2c} \sqrt{\frac{c^2-1}{n+1}} \right) \right\} \right. \\ & \quad \left. - n \sqrt{\frac{c^2-1}{n+1}} \sin \left\{ \frac{n+2}{n} \cos^{-1} \left(\frac{n+2}{2c} \sqrt{\frac{c^2-1}{n+1}} \right) \right\} \right] \\ & = \sin \delta \end{aligned} \quad (3-29)$$

これが求むる条件式で第6図に示す実線の曲線はこの条件式を極坐標 (c, δ) で示したものである. (3-29) で

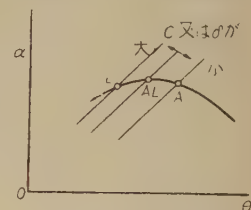


第6図 $c-\delta$ 曲線

$c=1$ とすると $\cos(n+2)/n \cdot \pi/2 = \sin \delta$, 従つて $\delta=\pi/n$ となり $c=1$ なる円との交点を示す. 第3図で $\delta=\pi/n$

となる場合を考えてみると, $\alpha=\theta$ と $\alpha'=0$ なる二直線の交点は $\theta'=\delta/2+(n-2)/4 \cdot \delta=n/4 \cdot \delta=\pi/4$ となり, δ の値が π/n よりも大きい場合には $\alpha=\theta+\pi/2$ と $\alpha'-\theta'$ 曲線との交点について議論すれば良いので, 結局 $\delta=\pi/n$ 以内についての $c-\delta$ 曲線を知れば足りる. 又 (3-29) で $\delta=0$ とすると $c=(n+2)/n$, 即ちこの点は前にも述べたように $\alpha'-\theta'$ 曲線が原点で 45° の方向の反曲点となる場合で, $\alpha=\alpha'$, $\theta=\theta'$ であるから原点が L' 型直交線となる.

次に第7図に示すように $\alpha-\theta$ 曲線と $\tan 2\theta=0$ との交点が $\partial\alpha/\partial\theta=0$ である場合は, AL 型直交線が存在し, その点の c 又は δ が僅か小さくなると A 型, 僅か大きくなると L 型直交線となる.



第7図 c 又は δ の変化

(3-9) に於て $\partial\alpha/\partial\theta=0$ とすると

$$\cos(2\theta+\delta) = \frac{c^2(n-2)+n}{2c(n-1)} \quad (3-30)$$

この式と (3-25) より θ を消去すると, AL 型直交線が存在する為の c と δ との条件式が求まる. (3-25) を次のように変形する.

$$c \sin n\theta - \sin n\theta \cos(2\theta+\delta) - \cos n\theta \sin(2\theta+\delta) = 0$$

従つて

$$\tan n\theta = \frac{\sin(2\theta+\delta)}{c - \cos(2\theta+\delta)}$$

$$\text{又} \quad \theta = \frac{1}{n} \tan^{-1} \frac{\sin(2\theta+\delta)}{c - \cos(2\theta+\delta)} \quad (3-31)$$

(3-30) より

$$\delta = \cos^{-1} \frac{c^2(n-2)+n}{2c(n-1)} - 2\theta$$

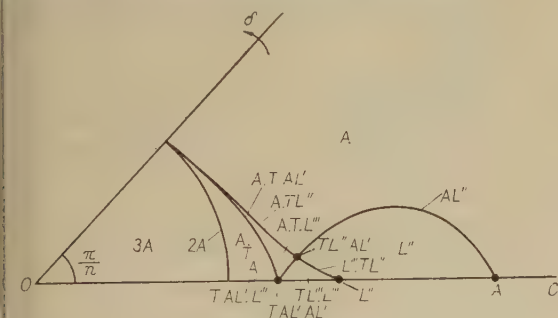
(3-30), (3-31) をこの式に入れると

$$\begin{aligned} \delta &= \cos^{-1} \frac{c^2(n-2)+n}{2c(n-1)} \\ &\quad - \frac{2}{n} \tan^{-1} \frac{2c(n-1)}{n(c^2-1)} \sqrt{1 - \left\{ \frac{c^2(n-2)+n}{2c(n-1)} \right\}^2} \end{aligned} \quad (3-32)$$

これが求める条件式である. 第6図に点線で示せる曲線はこの式が示す曲線である. $n=1$ の場合にはこの曲線は存在しない. 又この曲線も点 $(c=1, \delta=\pi/n)$ を通る. $\delta=0$ との交点の一つは, (3-32) より解るように, $\{c^2(n-2)+n\}/2c(n-1)=1$ より $n \neq 2$ の場合には $c=n/(n-2)$ 又 $c=1, n=2$ の場合には $c=1$ となるが $c=1$ はこの場合適当でない. 従つて $n=2$ の場合には (3-32) の曲

線の右端は $\delta=0$ とは交わらない. $n>2$ の場合には点 $c=n/(n-2)$ で交わり, この点では第 3 図からも解るように原点で水平方向の反曲点を有し, 原点が A 型直交線となる.

以上の結果を総合して一般の n の値に対して ($n \neq 1$), c と δ についての直交線の種類の分布は第 8 図のようになる. 図に於ては第 3 図の $\alpha-\theta$ 曲線の曲率の大きい部分附近の直交線のみを取り上げ, 他の曲率の小さい



第 8 図 直交線の種類の分布

曲線部分の直交線はすべて A 型となるので省略してある. この省略した A 型直交線の数 n 次の場合 $n-1$ 個である. 又以上述べた直交線の種類とその数は θ が $0 \sim \pi$ の範囲にあるものに対して記したものであるが, 応力の n 次の項のみの応力曲線は原点に対して対称であるから以上の結果をすべて 2 倍すれば応力曲線の全域の形状が求まる. 尚又第 3 図の $\alpha-\theta$ 曲線からも解るように, 曲率の大きい一つの曲線部分にて T 型直交線は二つ存在し得ないから, 零点の場合 L' 型直交線は存在し得ない.

$\delta=0$ の場合

$$\theta_1' = \theta_1''$$

c が一定で δ が 0 より増加すると

θ_1' は増大

θ_1'' は減少

δ が一定で c が 1 より増加すると

θ_1' は増大又は減少

θ_1'' は減少

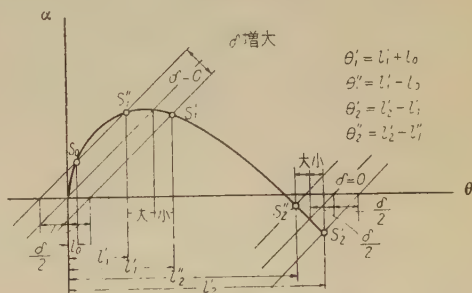
D) 直交線間の角度及び反曲線の位置

直交線間の角度は c 及び δ の値によつて変化する. そこでこの変化の模様を少しくしらべてみる. 一般に c と δ が与えられていると, (3-25), 即ち

$$c \sin n\theta - \sin(n+2\theta+\delta) = 0$$

よりこの場合の特異点の直交線の角度 θ が $n+2$ 個以下求められる. 然し, この三角方程式を解くことは厳密には困難であるから, 第 3 図の $\alpha-\theta$ 曲線より直交線間の角度の変化の一般的性質をしらべてみる.

$c>1$ の場合で $\alpha'-\theta'$ 曲線の原点附近の直交線の数 2 又は 3 になる場合, 即ち全体の直交線の数 $2n+4$ 又は $2n+2$ の特異点の場合は, 第 9 図に於ける原点附近の直交線 s_0, s_1', s_1'' の間の角 (s_0s_1' 間 θ_1', s_0s_1'' 間 θ_1''), 又そのすぐ両隣りの直交線 s_2', s_2'' 迄の間の角 ($s_1's_2'$ 間 $\theta_2', s_1's_2''$ 間 θ_2'') に関しては, $\alpha-\theta$ 曲線は



第 9 図 直交線間の角度

$\theta=0 \sim \pi/2$ の間で上に凸の曲線となるから次の性質がある.

$$\left. \begin{array}{l} \theta_2' = \theta_2'' \\ \theta_2' \text{ は減少} \\ \theta_2'' \text{ は増大} \\ \theta_2' \text{ は減少} \\ \theta_2'' \text{ は増大} \end{array} \right\} \quad (3-33)$$

E) 特異線及び不定線

特異点の軌跡を特異線と呼び, n 次の零点に於て $n+1$ 次以上の項を省略すれば, ある輻射線上の総ての点で $\tan 2\alpha=0/0$ なるとき, この輻射線を不定線と呼ぶ. 今迄の解析に於ては応力の n 次の項のみについてしらべて来たのであるが, 応力の $n+1$ 次以上の項が存在する時に不定線を有する零点の場合には, この零点の近傍に於ても応力の n 次の項のみならず $n+1$ 次の項をも考慮せねばならない. 従つて α は θ のみならず r の函数と

この結果より, $c>1$ より大の場合で全体の直交線の数 $2n+4$ 又は $2n+2$ の特異点の場合の $\theta_1' + \theta_2''$ の最大値は $c=1, \delta=0$ の時である. 即ち $\sin n\theta - \sin n-2$ $\cdot \theta=0$ の解である.

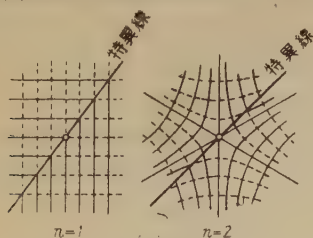
反曲線の位置は (3-30) で与えられる. 即ち

$$\cos(2\theta+\delta) = \frac{c_2(n-2)+n}{2c(n-1)}$$

より

$$\theta = \frac{1}{2} \left[\cos^{-1} \frac{c^2(n-2)+n}{2c(n-1)} - \delta \right] \quad (3-34)$$

なり、不定線を有しない場合のように r に無関係に零点の階数や性質を吟味することは出来ない。 $n+1$ 次以上



第 10 図 特異線をもつ零点

の応力の項が全く存在しない場合は $\sin(\theta+\delta/2)=0$ は不定線であると同時に特異線であり、応力曲線の形状は 3, e) 節の (3-19) 式で示すものとなるが、応力曲線の方向は特異線を境として $\pi/2$ だけ変る*。第 10 図はこの場合の $n=1, n=2$ の時の応力曲線の形状を示したものである。次に $n+1$ 次以上の応力が存在する場合について試してみる。

$n+1$ 次の応力が存在する場合

応力の $n+1$ 次の項をも考慮して応力函数を次のように考える。

$$F = r^{n+2} f(\theta) + r^{n+3} f'(\theta) = r^{n+2} \{a_0 \cos n\theta + b_0 \cos(\bar{n}+2\theta+\delta)\} + r^{n+3} \{a_0' \cos(\bar{n}+1\theta+\delta_1') + b_0' \cos(\bar{n}+3\delta+\delta_2')\} \quad (3-35)$$

従つて A) の場合と同様にして

$$\begin{aligned} \tan 2\alpha &= -\frac{c \sin \bar{n}-2\theta - \sin(n\theta+\delta) + D'r[c' \sin(\bar{n}-1\theta+\delta_1') - \sin(\bar{n}+1\theta+\delta_2')]}{c \cos \bar{n}-2\theta - \cos(n\theta+\delta) + D'r[c' \cos(\bar{n}-1\theta+\delta_1') - \cos(\bar{n}+1\theta+\delta_2')]} \\ &= \frac{2 \cos(\bar{n}-1\theta + \frac{\delta}{2}) \sin(\theta + \frac{\delta}{2}) - D'r[c' \sin(\bar{n}-1\theta+\delta_1') - \sin(\bar{n}+1\theta+\delta_2')]}{2 \sin(\bar{n}-1\theta + \frac{\delta}{2}) \sin(\theta + \frac{\delta}{2}) + D'r[c' \cos(\bar{n}-1\theta+\delta_1') - \cos(\bar{n}+1\theta+\delta_2')]} \end{aligned} \quad (3-36)$$

但し

$$c' = -\frac{n+1}{n+3} \frac{a_0'}{b_0'}$$

$$D' = \frac{n+3}{n+1} \frac{b_0'}{b_0}$$

又今は $c=1$ の値である。

この式に就いて応力曲線の形状及其性質をしらべるに、先ず係数と位相の間に次のような特別の関係のある二つの場合を考える。

(1) $c'=1, \delta=\delta_2'-\delta_1'$ の場合

(3-36) より

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \left[\cos(\bar{n}-1\theta + \frac{\delta}{2}) + D'r \cos(n\theta + \frac{\delta_1'+\delta_2'}{2}) \right] \cdot \sin(\theta + \frac{\delta}{2})}{2 \left[\sin(\bar{n}-1\theta + \frac{\delta}{2}) + D'r \sin(n\theta + \frac{\delta_1'+\delta_2'}{2}) \right] \cdot \sin(\theta + \frac{\delta}{2})} \quad (3-37)$$

となり $\sin(\theta+\delta/2)=0$ が再び特異線となる。又この式より点 $(r=1/D', \theta=(\delta-\delta_1'-\delta_2')/2+\pi)$ にも特異点が存在することが分る (第 11 図参照)。然し r が $1/D'$ よりも遙に小さい原点の近傍に於ては、この特異点による応力曲線の形状への影響は無視し得る。又これらの特異点に対しては原点をこの点に移して原点の近傍の応力曲

線の形状をしらべれば今迄に験べた n 次の零点の範疇に入る。このように高次の項を考えた為に現われる特異点は (3-36) の係数、位相が一般の値を取る時にも現われるが、今は多くをしらべない。

(2) $b_0'=0, \delta/2-\delta_1'=\pi/2$ の場合

* $c=1$ の場合の $\tan 2\alpha = \cos(\bar{n}-1\theta + \frac{\delta}{2}) \sin(\theta + \frac{\delta}{2}) / \sin(\bar{n}-1\theta + \frac{\delta}{2}) \sin(\theta + \frac{\delta}{2})$ より求められる 2 組の主応力の中、主応力の大きい方の方向を α_1 、小さい方を α_2 とすると

$$\tan \alpha_1 = \left\{ -\sin(\bar{n}-1\theta + \frac{\delta}{2}) \sin(\theta + \frac{\delta}{2}) - \sqrt{1} \cdot \left| \sin(\theta + \frac{\delta}{2}) \right| \right\} / \cos(\bar{n}-1\theta + \frac{\delta}{2}) \sin(\theta + \frac{\delta}{2}),$$

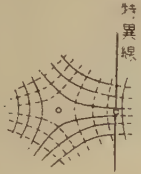
$$\tan \alpha_2 = \left\{ -\sin(\bar{n}-1\theta + \frac{\delta}{2}) \sin(\theta + \frac{\delta}{2}) + \sqrt{1} \cdot \left| \sin(\theta + \frac{\delta}{2}) \right| \right\} / \cos(\bar{n}-1\theta + \frac{\delta}{2}) \sin(\theta + \frac{\delta}{2})$$

従つて $\sin(\theta+\delta/2)$ が符号を変えると $\sqrt{1}$ の前の符号が変つた形となつて α_1 と α_2 が入れ変つたような式となる。しかも α_1, α_2 は連続的な変化をするから結局応力曲線の方向が $\sin(\theta+\delta/2)$ を境として $\pi/2$ 変る。

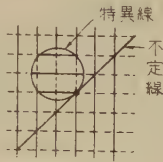
(3-36) より

$$\tan 2\alpha = \frac{\cos\left(\overline{n-1}\theta + \frac{\delta}{2}\right) \left[2\sin\left(\theta + \frac{\delta}{2}\right) - \frac{a_0'}{b_0}r\right]}{\sin\left(\overline{n-1}\theta + \frac{\delta}{2}\right) \left[2\sin\left(\theta + \frac{\delta}{2}\right) - \frac{a_0'}{b_0}r\right]} \quad (3-38)$$

従つて $2\sin(\theta + \delta/2) - a_0'/b_0 \cdot r = 0$ 即ち原点を通る円が特異線となる (第 12 図参照). 又原点でこの円の接線は $\sin(\theta + \delta/2) = 0$ なる不定線である.



第 11 図 特異線



第 12 図 特異線

(3) 係数, 位相が一般の場合

(3-36) で $a_0', b_0', \delta, \delta_1', \delta_2'$ が一般の値を取る時は分子分母共に第二項が存在する為に, $\tan 2\alpha$ は原点以外では不定とはならない. 応力曲線の形状は不定線附近に直交曲線が現われる (ここに直交曲線とは直交線が曲線となつてゐるものと呼ぶ). そして (3-36) は偶調函数,

$$F = r^{n+2}f(\theta) + r^{n+4}f''(\theta) = r^{n+2}\{a_0 \cos n\theta + b_0 \cos(\overline{n+2}\theta + \delta)\} + r^{n+4}\{a_0'' \cos(\overline{n+2}\theta + \delta_1'') + b_0'' \cos(\overline{n+4}\theta + \delta_2'')\} \quad (3-39)$$

従つて応力曲線の方向は

$$\tan 2\alpha = -\frac{c \sin \overline{n-2}\theta - \sin(n\theta + \delta) + D''r^2[c'' \sin(n\theta + \delta_1'') - \sin(\overline{n+2}\theta + \delta_2'')]}{c \cos \overline{n-2}\theta - \cos(n\theta + \delta) + D''r^2[c'' \cos(n\theta + \delta_1'') - \cos(\overline{n+2}\theta + \delta_2'')]} \quad (3-40)$$

但し

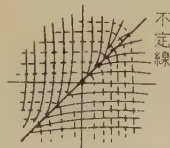
$$c'' = -\frac{n+2}{n+4} \frac{a_0''}{b_0''}$$

$$D'' = \frac{(n+3)(n+4)}{(n+2)(n+1)} \frac{b_0''}{b_0}$$

一般に (3-40) は偶調函数のみか, 奇調函数のみを含むから応力曲線の形状は原点に関して対称となる. 又 $n+1$ 次の応力が存在する場合と同様に $\partial\alpha/\partial\theta$ を求めて, r についての最低次の項を見ると \cos の偶調函数のみによつて示されることが解るから, $\partial\alpha/\partial\theta$ の符号は θ の直交曲線上の或る値 θ_0 と $\theta_0 + \pi$ では同符号をとる. 従つてこの直交曲線は原点を中心として両側共に Asymptote になるか, 又は共に Tangente になる. $n=1$ の場合の一例を第 14 図に示す.

一般に不定線を有する. $n+m$ 次の応力の項を考えた場合の応力曲線の形状は, m が奇数の場合には前述せる $n+1$ 次の応力を考えた場合の性質が現れ, m が偶数

奇調函数と共に含むから, 応力曲線の形状は原点に関



第 13 図 不定線を有する零点 ($n=1$)

して非対称となる. 又直交曲線上での $\partial\alpha/\partial\theta$ の値を求めると, r についての最低次の項は奇調函数のみによつて示されるから, $\partial\alpha/\partial\theta$ の符号は θ の或る値 θ_0 と $\theta_0 + \pi$ では異符号となる. 従つてこの直交曲線は原点を境として一つが

Asymptote, 一つが Tangente になる.

$n=1$ の場合の一例を第 13 図に示す.

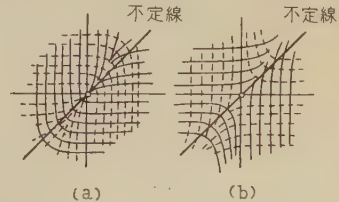
$n+2$ 次以上の応力が存在する場合

(3-36) で $D'=0$, 即ち $n+1$ 次の応力が全然存在せず $n+2$ 次以上の応力がある時, 又 $n+1$ 次の応力があつても (1), (2) の場合のように特異線が存在する時は, 更に $n+2$ 次以上の応力を考える必要がある. そして更に特異線が存在する特殊な場合と, 特異線のない一般の場合とに分けて考えれば良いが, ここでは $D'=0$ で $n+2$ 次の応力を考えた時の特異線のない一般の場合の応力曲線の形状を少しくしらべてみる.

(4) $D'=0$ の場合, 即ち $n+1$ 次の応力がない場合

応力の $n+2$ 次の項を考慮して応力函数を次のように考える.

の場合には $n+2$ 次の応力を考えた場合の性質が現れる. 不定線を有する時高次の項を考えて, この零点の階数を計算すると, $(n+奇数)$ 次の項を考えた場合は $1-n$ となり, $(n+偶数)$ 次の項を考えた場合には $2-n$, 又は $-n$ となる⁴⁾ という事が以上の議論からも解る.



第 14 図 不定線を有する零点 ($n=1$)

尚 (4) の場合にも特殊な場合として $a_0=0, b_0''=0, \delta=\delta_1''$ なる関係がある時 (2) のような原点を通る曲率を持つた特異線が生ずる. 又 $c''=1, \delta=\delta_2''-\delta_1''$ の場合には (1) のように $\sin(\theta + \delta/2) = 0$ が特異線となる. 然

し $n+3$ 以上の応力を考えた場合には曲率を持つた特異線は生じないようである。

F) 一次及び二次の零点

一次の零点

階数及び直交線の数のみより類別すると、第 2 表に記したようになる。直交線の種類を考慮して類別すると次のようになる。

$c=0$ の場合

$$r^{3/2} \sin \frac{3}{2}\theta = \text{const.}$$

又 $r^{3/2} \cos \frac{3}{2}\theta = \text{const.}$

応力曲線の形状は第 15 図 (a) のような双曲線となる。直交線間の角はすべて $2/3 \cdot \pi$ である。

$c=1$ の場合

$$r \sin \theta = \text{const.}$$

又 $r \cos \theta = \text{const.}$

応力曲線の形状は直交する平行線群となる ((b) 図)。

$c=\infty$ の場合

$$r^{1/2} \sin \frac{1}{2}\theta = \text{const.}$$

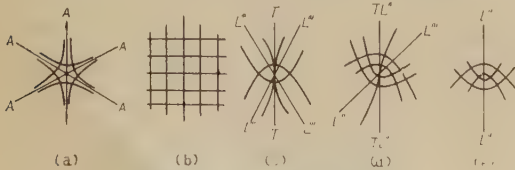
又 $r^{1/2} \cos \frac{1}{2}\theta = \text{const.}$

応力曲線の形状は拋物線群となる ((c) 図)。

c が一般の場合

$$\tan 2\alpha' = \frac{c+1}{c-1} \tan \theta'$$

$\alpha'-\theta'$ 曲線は第 3 図に示すものとなるから $c>1$ の時極大点が存在しない。従つて AL 型直交線は存在しない。第 6 図の $c-\delta$ 曲線より、結局一次の零点の種類は



第 15 図 一次の零点

第 15 図に示す 5 種が存在する。 $c=1$ で高次項を考えた不定線のある場合は D) にて示した通りである。直交線間の角度については、 $c=1, \delta=0$ の場合は (3-25) は

$$\sin \theta - \sin 3\theta = 0$$

従つて $\sin \theta (4 \sin^2 \theta - 2) = 0$

この方程式の解は $\theta=0, \theta=\pm\pi/4$ であるから第 15 図 (c), (d) の場合の

直交線 $L''' \cdot T \cdot L'''$ 間の角度の最大



第 16 図 $\theta_1' + \theta_1''$ の最大値 ($n=1$)

値は第 16 図示すように $\pi/2$ である。

二次の零点

$c=0$ の時 $r^2 \cos 2\theta = \text{const.}$

$r^2 \sin 2\theta = \text{const.}$ 直角双曲線群

$c=1$ の時 $r^{3/2} \sin \frac{3}{2}\theta = \text{const.}$

$r^{3/2} \cos \frac{3}{2}\theta = \text{const.}$ $\frac{2}{3}\pi$ 角双曲線群

$c=\infty$ の時 $r \sin \theta = \text{const.}$

$r \cos \theta = \text{const.}$ 直交平行線群

c が一般の時

$$\tan 2\alpha' = \frac{\sin 2\theta'}{c - \cos 2\theta'}$$

TL 型, AL 型の直交線が存在する条件式は $n=2$ の場合には次のように簡単になる。

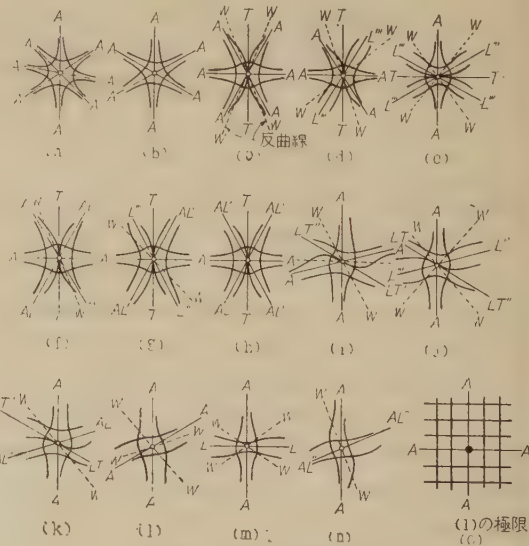
TL 型に対し

$$c^2 \sin \delta = \left(\frac{4 - c^2}{3} \right)^{3/2}$$

AL 型に対し

$$c^2 (1 \pm \sin \delta) = 2$$

これらは何れも von Mises が導いたものと同一の式である。第 6 図の $c-\delta$ 曲線より、二次の零点は第 17 図に示すような 14 種の特異点が存在することになる。直交線間の角度については、 $c=1, \delta=0$ の場合 (3-25) は

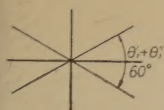


第 17 図 二次の零点

$$\sin 2\theta - \sin 4\theta = 0$$

従つて

$$\sin \theta \cos \theta (1 - 2 \cos 2\theta) = 0$$



第 18 図 $\theta_1' + \theta_1''$ の最大値 ($n=2$)

この方程式の解は $\theta=0, \theta=\pm\pi/6$, $\theta=\pi/2$ であるから $\theta_1' + \theta_1''$ の最大値は $\pi/3$ で第 18 図に示すようになる。 $c=1$ の場合で高次項を考えた場合は D) に示した通りである。

4. 従来の研究との比較

古く Föpl から始まつた弾性平面問題の特異点の研究が前にも述べたように数名の人々によつて追加研究されて来たが、本研究がこれらの人々の結果と異なる所、及び従来の研究結果の疑問な点につき少しく批判を行い、併せてこれ等の人々の業績を簡単に記してみる。

Föpl 彼は直角坐標を使つて一次及二次の零点につき一つの坐標軸に対称な特異点と、非対称な特異点とに分けて解析している。一次についてはすべての種類を挙げているが、二次の零点に対しては一次の項を含む軸対称なもの、軸対称でないもの、又一次の項を含まないものの三種に分け、夫々特殊の場合を一つづつ挙げてゐるのみである。直交線の種類、階数、不定線については未だ触れていない。従つて零点の類別の解析として不完全といわざるを得ないものである

奥田博士 相当に詳細に亘つて解析が行われているのでここでは特にその特色と疑問と思われる点を列挙してみよう。

(1) 階数を導入して特異点の種類を定めた。

(2) 特徴ある輻射線の種類を表にして挙げているが、本著者の所謂 L''' 型、 AL'' 及び TL'' 型が存在すること、並びに L' 型と TL' 型が零点の場合には存在しないことを示していない。又条件 $\partial\alpha/\partial\theta=0, \partial\beta/\partial\theta=0$ で更に $\partial^2\alpha/\partial\theta^2=0, \partial^2\beta/\partial\theta^2=0$ になる場合の説明がない。

(3) 1 次の零点に対しては筆者の結果は同じものになつた。

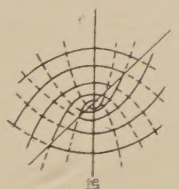
(4) 2 次の零点に対して応力曲線が同心円、又渦形になる 2 階 2 次の零点を図示しているが、応力函数が重調和函数で、而も直角坐標 x, y の冪函数で示される零点の場合にはこのような特異点は存在しない。

(5) 0 階 2 次の零点の種類分けが不充分である。

(6) 2 次の場合に拋物線型の応力曲線にも不定線が存在することを示しているが、誤りであろう (第 19 図参照)。

(7) $n+2$ 次以上の応力を考慮した場合の応力曲線の形状、及び更にその特殊な場合として特異線が生ずることの説明が不充分である。

(8) 一般 n 次の場合の零点の極坐標による解析を行つてい



特異線を持つ2次の零点

第 19 図

るが、直交線の種類については解析が行われていない。

von Mises 1 次, 2 次の特異点のみについて、直角坐標より出発して、変数変換により筆者と同じ式を導いて解析しているが、 AL 型、 TL 型の直交線に言及していない。又不定線、直交線間の角についても何も触れていない。

Садовский 直交線の数 A , 特異点の種別番号 N を導入して、直交線数及び階数のみにより一般 n 次の零点の種別を完全に定めている。然し直交線の種類による類別を行っていない。従つて n 次の零点の応力曲線の形状を明にすることは出来ない。

5. 結 論

平面弾性問題に於ける特異点の弾性体内部に於ける一般 n 次の零点の種別を解析し、その性質を見出して特異点の近傍に於ける応力曲線の形状を明にした。而して 1 次 2 次の零点の類別を例題的に行つて従来の研究結果と比較した。今迄に行われなかつた 3 次以上の一般 n 次の特異点の性質を見出し得たので、特にここに次の事を記して結論とする。即ち 3 次以上の零点の直交線の種類は 2 次の場合と何ら変わらないで、応力曲線の形状は 2 次の場合と同じ型の直交線の組合せ部分を持ち、それに A 型が加わつた形となる。

本解析結果が光弾性実験に依つて実証され、且つ実験に対して有益に働くものとならんことを願うものである。最後に本研究に際し終始御指導を戴いた倉西先生に厚く感謝の意を表する次第である。

文 献

- 1) G. Darboux; Sur la forme des lignes de courbure dans le voisinage d'un ombilic, Des Surfaces Tome IV, Note VII.
- 2) L. Föpl; Über singuläre Punkte 1. Ordnung des ebenen Spannungszustandes. Mitt. aus dem Mech.-Tech. Laborat. der Tech. Hochschule München 34. Heft, 1930.
- 3) L. Föpl; Der singuläre Punkt 2. Ordnung. 上と同じ 35. Heft, 1931.
- 4) 奥田克巳; 二次元弾性問題に於ける特異点. 造船協会会報 56 号, 昭和 10 年 6 月.
- 5) М.А. Садовский; Исследование особых точек типа $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$, Находящихся внутри области. упругость и Пластичность, Выпуск 11, 1935.
- 6) R. v. Mises; Das Verhalten der Hauptspannungen in der Umgebung einer Verzweigungsstelle. ZAMM, 18, 1938.
- 7) R. v. Mises; Ueber den singulären Punkt zweiter Ordnung im ebenen Spannungsfeld. Stephen Timoshenko 60th Anniversary Volume, 1938.

昭和30年11月25日印刷

昭和30年11月30日発行

発行者

日本大学工学研究所

東京都千代田区神田駿河台1丁目8番地

電話東京(29) 7711—7719

Published by: The Research Institute of
Technology, Nihon University.

Address: No. 8, 1-Chome, Surugadai,
Kanda, Chiyoda-ku, Tokyo.

印刷所

株式会社 国際文献印刷社

東京都千代田区富士見町1丁目10番地

印刷者

笠井康頼

東京都千代田区富士見町1丁目10番地

(非 売 品)

